Vollständigere Fortsetzung
des
Versuchs
in
socratischen Gesprächen
über die
wichtigsten Gegenstände
der
ebenen Geometrie.

Von

Johann Andreas Christian Michelsen,

Professor der Mathematic und Physic am vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium.

Erster Band.

Berlin
bey Siegismund Friedrich Hesse,
in der breiten Straße.
1783.

Vorrede.

Ich war Willens, in diesem Bande die Lehre von der Gleichheit der ebenen Figuren zu Ende zu bringen, und also darin auch die regulären Vielecke nebst der Theilung des Kreises, welche dabey vorausgesetzt wird, zu betrachten. Da mir aber mehrere Umstände die Ausführung dieses Vorsatzes unmöglich gemacht haben, und die Erscheinung dieser Fortsetzung gleichwohl nicht länger aufgeschoben werden sollte; so sahe ich mich genöthiget abzubrechen, und das übrige dem folgenden Bande, welcher Ostern 1784 herauskommen wird, vorzubehalten. Dieser Band

wird

wird also mit dem gegenwärtigen auf das genaueste zusammen hängen, ja selbst zur richtigen Beurtheilung und vollständigen Benutzung desselben erforderlich seyn. Aus diesem Grunde füge ich auch hier weiter nichts hinzu, sondern verspare das zu sagende ebenfalls zu der Vorrede des gedachten zweyten Bandes dieser vollständigern Fortsetzung. Berlin, den 1ten October 1783.

Erstes

Erstes Gespräch.

L. Also hat sich in der Zeit, daß wir uns nicht mit der Mathematic beschäftiget haben, Ihre Lust zu derselben nicht vermindert?

S. Vermindert? Dann müßten Sie das letzte Mal nicht gesagt haben, daß ich mir Hofnung machen dürfte, von der Mathematic unter ihre Lieblinge aufgenommen zu werden.

L. Sie haben doch aber auch den Zusatz, den ich damals machte, nicht vergessen, wenn Sie so fortfahren?

S. O ich will nicht bloß so fortfahren, sondern ich will mich noch stärker angreifen, wenn Sie nur wieder fortfahren wollen, mich in der Mathematic zu unterrichten!

L. Wenn Sie es so sehnlich wünschen, als Sie es zu thun scheinen, so kann ich nunmehr damit wieder den Anfang machen und dann auch ununterbrochen fortfahren — —

S. (Fällt ein.) O ja! thun sie es doch.

L. — Mich dünkt, daß ich Ihnen am Ende unsrer letzten Unterredung auch einen Rath gegeben habe, was war es doch für einer?

S. Ich sollte alles, was wir von den Parallelogrammen gehabt hatten, recht fleißig überdenken, und auch daraus die Kennzeichen der gleichen Winkel, Seiten und Figuren mir merken.

L. Haben Sie das gethan?

S. Wollen Sie mir wohl erlauben, daß ich Ihnen die Aufsätze hole, die ich darüber gemacht habe?

L. Sehr gern.

(Der Schüler überreicht bey seiner Wiederkunft dem Lehrer folgende Aufsätze.)

Kennzeichen gleicher Dreyecke, aus der Lehre von den Parallelogrammen gezogen.

1. Zwey Dreyecke sind gleich so daß sie sich decken, wenn sie die Theile eines Parallelogramms sind, welches durch die Diagonale in zwey Dreyecke getheilt worden ist.

2. Zwey Dreyecke sind gleich ohne sich zu decken, wenn sie einerley oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallelen liegen.

Kennzeichen gleicher gerader Linien, aus der Lehre von den Parallelogrammen gezogen.

1. Zwey gerade Linien sind gleich, wenn sie die Endpunkte zweyer gleichen Parallellinien verknüpfen, ohne sich zu schneiden.

2. Zwey

2. Zwey gerade Linien sind gleich, wenn sie gegenüber stehende Seiten in einem Parallelogramme sind.

Kennzeichen gleicher geradlinigen Winkel aus der Lehre von den Parallelogrammen gezogen.

1. Zwey geradlinige Winkel sind gleich, wenn sie Wechselwinkel bey zwey Parallellinien sind, die von einer dritten geschnitten werden.

2. Zwey geradlinige Winkel sind gleich, wenn der eine ein äusserer und der andere ein innerer ihm gegenüber stehender Winkel bey zwey Parallellinien ist, die von einer dritten geschnitten werden.

3. Zwey geradlinige Winkel sind gleich, wenn sie gegenüber stehende Winkel in einem Parallelogramme sind.

Kennzeichen gleicher Parallelogramme.

1. Zwey Parallelogramme sind einander gleich, wenn sie einerley oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallelen liegen; doch decken sie sich deswegen nicht.

2. Zwey Parallelogramme sind einander gleich, wenn sie die Ergänzungen von Parallelogrammen um der Diagonala sind.

L. (Nachdem er das vorhergehende durchgelesen hat:) Diese Aufsätze sind mir ein Beweis, daß Sie meinen Rath treulich befolgt haben. Aber

sagen Sie mir doch, wie Sie bey dem ersten Kennzeichen gleicher gerader Linien auf den Zusatz gekommen sind: ohne sich zu schneiden? So viel ich mich erinnere, habe ich Sie darauf damals, als wir von diesem Kennzeichen sprachen, nicht aufmerksam gemacht.

S. Anfänglich hatte ich diesen Zusatz auch nicht mit aufgeschrieben; aber er fiel mir einmal ein, da ich zwischen zwey gleichen Parallellinien, die nicht gerade über einander gezogen waren, kreuzweise nach den Endpunkten derselben zwey gerade Linien zog. Es war da gar zu deutlich, daß diese nicht gleich waren.

L. Daß Sie, dadurch verleitet, Ihrem Aufsatze diesen Zusatz gegeben haben, dafür sollen Sie zur Belohnung bald mit schweren Sätzen der Mathematic sich beschäftigen; denn so belohne ich den Fleißigen, von dem ich mir Hofnung mache. — — Doch ich muß Sie noch auf einige Fragen führen, deren Beantwortung Sie ein ander Mal mir schriftlich bringen können. Diese Fragen sind:

1. Wenn sind zwey gerade Linien parallel?

2. Wenn sind zwey Winkel zusammen genommen so groß als ein dritter?

3. Wenn sind zwey Winkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel?

4. Wenn ist ein Dreyeck die Hälfte von einem Parallelogramme?

5. Wenn

5. Wenn ist ein Dreyeck einem Parallelogramme gleich?

6. Wenn ist ein Quadrat zweyen andern Quadraten gleich?

7. Wenn ist ein Quadrat zweymal so groß als ein anderes?

8. Wenn ist ein Rechteck einem Quadrate gleich?

9. Wenn ist ein Parallelogramm einem Quadrate gleich?

Ich werde Ihnen nachher diese Fragen schriftlich geben, und gelegentlich können Sie dann die darauf möglichen Antworten aufsuchen und dabey schreiben. — Und nun weiter! Zu etwas Neuem? Nicht wahr?

S. (Freudig) O ja!

L. Viel wird es indeß heute nicht werden, denn das Sprechen wird mir schwer, wenigstens werde ich Ihnen, wenn Sie Sich mit mathematischen Gegenständen beschäftigen wollen, heute nicht so helfen können, wie sonst. — Hier ist eine gerade Linie, BC Fig. 1. und da ist auch ein Zirkel und ein Lineal; vertreiben Sie Sich damit die Zeit.

S. Da werde ich bald fertig werden, denn erstlich beschreibe ich über dieser Linie ein gleichseitiges Dreyeck und dann theile ich sie in zwey gleiche Theile.

L. Das wäre denn aber bloß etwas schon bekanntes wiederholt.

S. Weiter kann ich dabey auch nichts thun.

L. Errichten Sie doch einmal über der linie BC (Fig. 1) ein gleichseitiges Dreyeck, und theilen Sie dieselbe darauf auch in zwey gleiche Theile.

(Der Schüler thut solches, und es entstehet die 2te Figur.)

Was haben Sie nun zu thun?

S. Nun ziehe ich die linie AD (Fig. 3)

L. Und dann?

S. Nun habe ich zwey gleiche Dreyecke.

$$\triangle ABD = \triangle ADC$$

denn $AB = AC$

$BD = DC$

und $AD = AD$. Folglich ist

auch $BAD = DAC$

und $ADB = ADC$

L. Warum setzen Sie denn nicht auch hinzu, daß $ABD = ACD$ sey?

S. Das war schon vorher bekannt, weil das Dreyeck ABC ein gleichseitiges Dreyeck seyn sollte, und also auch alle seine Winkel einander gleich seyn müssen.

L. Wie steht nun die linie AD auf der linie BC?

S. Senkrecht; denn die Nebenwinkel ADB und ADC sind einander gleich.

L. Und was ist mit dem Winkel BAC durch die linie AD geschehen?

S. Er ist durch sie in zwey gleiche Theile getheilt worden.

L. Was

L. Was findet also statt, wenn man die eine Seite eines gleichseitigen Dreyecks in zwey gleiche Theile theilt, und aus der Spitze des gegenüber stehenden Winkels nach dem Theilungspunkte eine gerade linie zieht?

S. Es wird dann auch dieser Winkel in zwey gleiche Theile getheilt, und die gezogene linie steht auf der getheilten senkrecht.

L. Wie aber, wenn das Dreyeck A B C nur ein gleichschenkliges Dreyeck und B C die Grundlinie wäre, wie Fig. 4?

S. Das änderte nichts, denn ich brauche ja zum Beweise bloß, daß B D = D C, und nicht das B C = A B oder A C sey.

L. Also kann man auch sagen?

S. Wenn man die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks in zwey gleiche Theile theilt, und aus der Spitze desselben eine gerade linie nach dem Theilungspunkte zieht; so steht diese linie auf der Grundlinie senkrecht, und theilt den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile.

L. Wie wäre es denn aber, wenn ich aus der Spitze A des gleichseitigen Dreyecks Fig. 3 oder des gleichschenkligen Fig. 4 ohne vorher die Grundlinie zu theilen, eine gerade linie senkrecht darauf zöge?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Dann würde dadurch sowohl der Winkel an der Spitze als die Grundlinie in zwey gleiche Theile ge-

theilt. Denn in der 3ten sowohl als in der 4ten Figur wäre

$$\triangle ABD = \triangle ADC$$

weil $AB = AC$

$ABD = ACD$

und $ADB = ADC$; und also

auch $BAD = DAC$

und $BD = DC$.

L. Also hätten wir doch einen Satz erhalten, den wir wenigstens uns bisher noch nicht deutlich gedacht haben. Vielleicht hilft es uns in der Folge zur schnellen Beurtheilung, wenn wir uns merken, daß eine aus der Spitze eines gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreyecks auf die Grundlinie gezogene senkrechte Linie sowohl den Winkel an der Spitze als die Grundlinie in zwey gleiche Theile theile. — Anfänglich glaubten Sie wohl nicht, daß Sie einen neuen Satz finden würden?

S. Ich dachte, daß ich nur das gehabte noch einmal wiederholen sollte.

L. Sie wären auch auf nichts neues gekommen, wenn Sie nicht über der gegebenen Linie zugleich ein gleichseitiges Dreyeck errichtet, und sie auch in zwey gleiche Theile getheilt hätten. So muß man mehreres bekanntes mit einander in Verbindung bringen, wenn das einzelne nicht zu neuen Bemerkungen führt. — Vielleicht ist Ihnen noch etwas bekannt. Besinnen Sie Sich, wir wollen solches mit dem vorhergehenden ebenfalls verknüpfen; wer

weiß,

weiß, ob sich uns da nicht wieder etwas neues zeigt?

S. (Nach einer kleinen Pause) Ich kann auch ein Quadrat über der Linie BE beschreiben.

L. Thun Sie es.

S. Ich werde aber auch ein gleichseitiges Dreyeck darüber beschreiben, und zugleich die Linie in zwey gleiche Theile theilen.

(Er thut es und es entsteht die 5te Figur.)

Was das für eine Figur ist! Aber ich muß ja auch noch die Linie AD ziehen; und wer weiß, ob es nicht gut ist, wenn ich sie zugleich bis an die obere Seite des Quadrats verlängere.

(Er thut auch dieses, so daß die 6te Figur entsteht.)

Was nun? (Indem er sich zum Lehrer wendet.) O lassen Sie mir einmal Zeit zum Nachdenken. Ich will doch sehen, ob ich nicht etwas finden kann. — Das Dreyeck hat mit dem Quadrate einerley Grundlinie, — liegt aber nicht mit ihm zwischen einerley Parallelen.

Wenn es mit dem Quadrate zwischen einerley Parallelen läge, so wäre es die Hälfte; so aber ist es weniger als die Hälfte. Weiter sehe ich hier nichts. — Aber da sind noch zwey Rechtecke, das Rechteck ED und das Rechteck GC, diese sind beyde zusammen genommen dem Quadrate EC gleich.

L. Las-

L. Lassen sich die Rechtecke ED und GC nicht auch unter sich vergleichen?

S. Ja; sie sind einander gleich. Denn da BC in D in zwey gleiche Theile getheilt ist, so haben sie gleiche Grundlinie, und liegen zwischen einerley Parallelen BC und EF.

L. Also ist das Quadrat EC gegen eins von den beyden Rechtecken ED oder GC gehalten?

S. Zweymal so groß als eins dieser Rechtecke.

L. Aber wie würden Sie denn wohl die Rechtecke ED und GC, wenn Sie keine Figur zur Hand hätten, mit Worten beschreiben?

S. Das weiß ich nicht.

L. So müßten Sie Sich doch dabey ausdrücken, daß der, mit dem Sie sprächen keine andere Figur nach Ihren Worten sich denken könnte, als diejenige, welche Sie selbst in Gedanken hätten?

S. Freylich müßte ich das; aber wie soll ich das machen?

L. Haben Sie, wenn Sie von einem Rechtecke sprechen, nöthig zu sagen, wie groß ein jeder Winkel in demselben sey?

S. Nein, das versteht sich von selbst, denn in einem Rechtecke müssen ja nach der Erklärung davon alle Winkel rechte Winkel seyn.

L. Also hätten Sie bey der Beschreibung eines Rechtecks auch nur zu sehen?

S.

S. Auf die Seiten.

L. Und ist es dabey etwa nöthig, wie z B. bey einem ungleichseitigen Dreyecke, daß Sie von einer jeden Seite sagen, wie groß sie sey?

S. Nein, ich brauche es nur von zweyen zu sagen, denn wenn diese bekannt sind, so kennt man auch die übrigen, weil in jedem Rechtecke, so wie in jedem Parallelogramme immer die beyden gegenüber stehenden Seiten gleich sind.

L. Was für zwey Seiten aber müssen Sie beschreiben? Etwa zwey Seiten, die einander gegenüber stehen?

S. Nein, sondern zwey Seiten, die Einen Winkel einschliessen.

L. Von solchen zwey Seiten sagt man nun, daß sie das Rechteck einschliessen. Wenn man also die 6te Figur vor Augen hat, so kann man z. B. das Rechteck ED auch so beschreiben, daß man sagt: das Rechteck, welches zwischen den Seiten BD und EB oder zwischen den Seiten BD und EB eingeschlossen ist. Aber wie nun, wenn man die 6te Figur nicht vor Augen hätte, und bloß die linie BC aber in D in zwey gleiche Theile getheilt da wäre?

S. Das weiß ich nicht.

L. Was ist denn BD von BC?

S. Die Hälfte.

L. Und wie groß ist BE?

S. So groß als BC.

L. Und EG?

S. Ist so groß als BD und also auch die Hälfte von BC.

L. Wovon ist also nun das Rechteck ED eingeschlossen?

S. Von der ganzen linie BC und von ihrer Hälfte?

L. Und das Rechteck GC?

S. Ist auch ein Rechteck, welches die ganze linie BC und ihre Hälfte einschließen.

L. Und wie beschreiben Sie also beyde Rechtecke ED und GC?

S. Es sind zwey Rechtecke, welche von der ganzen linie BC und ihrer Hälfte eingeschlossen werden.

L. Und beyde zusammen genommen sind gleich?

S. Dem Quadrate von BC.

L. Und eins allein genommen?

S. Ist die Hälfte dieses Quadrats.

L. Und wenn man also eine gerade linie in zwey gleiche Theile theilt, so ist?

S. Das Quadrat der ganzen linie doppelt so groß, als das Rechteck, welches von der ganzen linie und ihrer Hälfte eingeschlossen wird.

L. Wie aber, wenn die Figuren ED und GC Fig. 6. keine Rechtecke, sondern Trapezien wären?

S. Das wäre schlimm, dann wäre meine Mühe vergeblich gewesen. — Aber nein

es

es sind Rechtecke, denn die linien BC und EF sind parallel, weil sie gegenüber stehende Seiten eines Quadrats sind, und EB und GD sind parallel, weil von den Winkeln EBD und BDG jeder einem rechten Winkel gleich ist, und aus einem ähnlichen Grunde ist auch FC und GD parallel.

L. Auf diese Art haben Sie freylich bewiesen, daß ED und GC nicht Trapezien, sondern Parallelogramme sind; aber auch, daß es Rechtecke sind.

S. Es ist wahr ich habe vergessen, die Winkel zu berühren. Aber wenn erst ausgemacht ist, daß ED und GC Parallelogramme sind, dann ist auch leicht zu beweisen, daß es Rechtecke sind. Denn in ED ist EBD, und in GC ist FCD ein rechter Winkel, und wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so sind es alle; also sind nun auch ED und GC nicht bloß Parallelogramme, sondern auch Rechtecke.

L. Das gleichseitige Dreyeck ABC Fig. 5 und 6 hat uns also nichts geholfen. Wir wollen es also nun einmal weglassen, und dagegen die linien FC und BE in I und H in zwey gleiche Theile theilen und die linie IH ziehen. Hier haben Sie die Figur. Fig. 7.

S. Da ist also ein Quadrat vier Rechtecken gleich, und vorher nur zweyen. Aber sind die Figuren EK, GI, HD und KC auch wohl Rechtecke? Einen rechten Winkel hat

eine

eine jede, denn in EK ist E, in GI ist F, in HD ist B und in KC ist C ein rechter Winkel, denn alle diese Winkel sind Winkel des Quadrats EC. Ich habe also nur noch zu beweisen, daß EK, GI, HD und KC Parallelogramme sind. GD und BE, desgleichen GD und FC sind nun schon parallel, das haben wir schon bey Fig. 6. gehabt, und also ist auch GK ≠ EH, KD ≠ HB, und auch GK ≠ FI und KD ≠ IC. Aber wie verhält sichs mit HI und EF, desgleichen mit HI und BC? —— Jetzt fällt mir es ein, daß auch diese parallel sind, denn sie verknüpfen die Endpunkte der gleichen und parallelen Linien EH und FI, desgleichen HB und IC mit einander, und dann sind zwey gerade Linien nicht nur gleich, sondern auch parallel. Also habe ich im Anfange ganz recht gesagt, wenn ich die Figuren EK, GI, HD und KC Rechtecke nannte.

L. Falsch war diese Benennung freylich nicht, und doch könnte eine andere noch besser gebraucht werden.

S. (Sieht sehr aufmerksam nach der Figur, und denkt eine Zeitlang nach.) Ich wüßte doch nicht, wie ich sie anders nennen sollte.

L. Sind alle rechtwinklige Parallelogramme Rechtecke?

S. Nein, es können auch Quadrate seyn. — Ach, nun merke ich, was ich soll.

Qua-

Quadrate hätte ich sollen sagen, und man sieht es ja auch gleich, daß es Quadrate sind.

L. Man sieht es auch gleich? Wenn ich nun aber die Figur zerrisse, und Ihnen nur die Art, wie ich sie zeichnen könnte, beschriebe, würden Sie es dann auch noch sehen? In der Mathematic muß der Verstand urtheilen, nicht das Auge.

S. Daran hätte ich wohl selbst denken können, daß ich mich nicht auf den Schein berufen dürfte. Sie haben es mir ja schon einmal gesagt. Nun ins künftige will ich mich desto mehr hüten. — Ich muß also untersuchen, ob in den Figuren EK, GI, HD und KC alle Seiten oder nur die gegenüber stehenden gleich sind? — — Aber das ist ja leicht. EB, BC, CF, und FE sind insgesammt als Seiten eines Quadrats einander gleich, und die Seiten EH, HB, BD, DC, CI, IF, FG und GE sind immer Hälften von diesen Linien, und müssen also auch unter einander gleich seyn.

L. Aber wo bleiben denn GK, KH, KI und KD?

S. Das sind mit jenen Hälften immer Parallelen zwischen Parallelen, und also auch diesen Hälften gleich. Denn es ist GK ≠ EH, HK ≠ EG, ferner GK ≠ FI und KI ≠ GF u. s. w.

L. Also ist nunmehr das Quadrat EC so groß?

S. Als die vier Quadrate EK, GI, HD und KC.

L. Und welches ist wohl unter diesen vier Quadraten das größte?

S. (Sinnt eine Zeitlang nach) Sie sind alle gleich. Denn EK = HD, weil beyde gleiche Grundlinien EH und HB haben und zwischen einerley Parallelen EB und GD liegen; ferner ist HD = KC, weil beyde ebenfalls gleiche Grundlinien BD und DC haben, und zwischen einerley Parallelen BC und HI liegen; und aus einem ähnlichen Grunde ist KC = GI, und GI = EK, und also alle vier Quadrate einander gleich.

L. Folglich ist nunmehr auch das Quadrat BC gegen eins von den vier gleichen Quadraten EK, GI, HD und KC gehalten?

S. Viermal so groß.

L. Also das Quadrat einer ganzen Linie?

S. (Fällt schnell ein) Viermal so groß als das Quadrat der Hälfte dieser Linie.

L. Wenn man also ein Quadrat hat, und die eine Seite davon noch einmal so groß macht, und über dieser Linie ebenfalls ein Quadrat errichtet; ist dies letztere Quadrat dann auch nur zweymal so groß als das erstere?

S. Nein, sondern viermal so groß.

L. Wenn ich mir also ein Quadrat gedächte, darauf zehn Menschen stehen könnten; wie

wie viel würden auf dem Platz haben, dessen jede Seite noch einmal so groß wäre?

S. Viermal so viel, oder vierzig.

L. Und die Seite eines Quadrats, welches nur zweymal so groß seyn soll, als ein anderes, kann die wohl zweymal so groß seyn, als eine Seite dieses andern Quadrats?

S. Nein sie muß kleiner seyn, denn sonst wäre ja das Quadrat viermal so groß.

L. Erinnern Sie Sich wohl noch, wie man die Seite eines Quadrats findet, welches zweymal so groß als ein anderes seyn soll?

S. (Besinnt sich einige Augenblicke) Ich ziehe in dem gegebenen Quadrate die Diagonale, und diese ist die gesuchte Seite.

L. Kann aber die Diagonale wohl so groß seyn, als die beyden Seiten des Quadrats, mit welchen sie ein Dreyeck macht?

S. Nein, denn sonst wären ja in einem Dreyecke zwey Seiten nicht größer, als die dritte.

L. Das ist also dieselbe Behauptung, aber auf einem andern Grund gebauet. — — Nun will ich Ihnen hier (Fig. 8.) eine gerade linie AB geben, die in dem Punkte C in zwey ungleiche Theile getheilt ist. Wenn Ihnen die Beantwortung der Fragen, derer ich vorhin gedachte, und die ich Ihnen jetzt noch aufsetzen will, Zeit dazu übrig läßt, so beschäftigen Sie Sich zum Zeitvertreibe mit dieser Linie, und versuchen Sie, was Sie daraus machen können.

Zweytes Gespräch.

S. Ich habe noch nicht ganz mit der Beantwortung der Fragen, die Sie mir mitgegeben haben, fertig werden können, und muß Sie daher bitten, mir noch einen Tag Zeit zu lassen. Auf die sieben ersten Fragen habe ich die Antworten schon, aber mit der achten und neunten wills gar nicht fort.

L. Sie sind fleißiger gewesen, als ich es verlangt habe, und wenn Sie die gedachten sieben Fragen gut beantwortet haben, so muß ich mich wundern, daß Sie damit schon fertig sind.

S. Das hat mir nicht viel Mühe gemacht. Denn seit der Zeit, daß ich dergleichen Fragen schriftlich habe beantworten müssen, bin ich auf jedes Kennzeichen der betrachteten Sachen vorzüglich aufmerksam gewesen, und habe sie mir, so oft ich eins kennen lernte, besonders gemerket. Als ich die Aufsätze machte, die ich Ihnen gestern gegeben habe, so dachte ich nur nicht daran, daß man ausser den vor langer Zeit mir vorgelegten Fragen noch andere machen und beantworten müßte, sonst wäre ich vielleicht selbst auf einige von den gestrigen gefallen; alle freylich hätte ich nicht gefunden. Den Vortheil habe ich indeß von meinem Aufschreiben doch gehabt, daß ich das Aufgesetzte nur aus-

aussuchen, und in der rechten Ordnung abschreiben durfte.

L. Nun sehe ich wohl, wie es Ihnen möglich gewesen ist, gestern mit der Beantwortung der mitgegebenen Fragen bis auf die beyden letzten fertig zu werden, und ich muß Sie also nicht so wohl wegen Ihres gestrigen, als vielmehr des lange vorher bewiesenen Fleisses wegen, der Ihnen jetzt die Arbeit so erleichtert hat, loben. Aber das thue ich denn auch um so viel lieber, da Sie denselben so ganz ungeheißen und so ganz in der Stille bewiesen haben. — Da Sie mit den beyden letzten Fragen nicht haben fertig werden können; so sind Sie auch wohl noch nicht zu der Linie, die ich Ihnen mitgegeben habe, gekommen?

S. Ganz habe ich sie nicht vergessen, aber weiter auch noch nichts damit gethan, als diese Figuren gemacht. (Er übergiebt dem Lehrer die 9te und 10te Figur.)

L. Wie sind Sie auf diese Figuren gefallen?

S. Ich beschrieb erst über der Linie AB ein Quadrat, und da in derselben der Punkt C bemerkt war, so sahe ich mich noch nach einem andern um, um zwischen beyden eine gerade Linie zu ziehen. Da ich keinen bequemen Punkt bemerkt fand, denn nach E oder D aus C eine gerade Linie zu ziehen, was hätte mir das geholfen? so schnitt ich von D auf DE das Stück DF so groß als CB ab und zog nun CF

und so erhielt ich die 9te Figur. Nun aber nahm ich die Figuren, die wir gestern gehabt haben (Fig. 6 und 7) vor mich, und da brachte mich die 7te, in welcher alle Seiten des Quadrats der ganzen Linie auf gleiche Art getheilt, und zwischen den Theilungspunkten gerade Linien gezogen waren, auf die Gedanken, es hier auch so zu machen, und so entstand die 10te Figur.

L. Wie Ihnen die Vergleichung des Unbekannten mit dem Bekannten geholfen hat! Sie haben mir da ein Paar sehr brauchbare Figuren mitgebracht, und zur Belohnuug dafür will ich Ihnen die Sätze, die man dabey lernen kann, nicht sagen, Sie sollen das Vergnügen haben, sie selbst zu finden.

S. Suchen will ich gern, wenn es mir nur nicht geht wie gestern bey der Beantwortung der 8ten und 9ten Frage, da habe ich lange gesucht und nichts gefunden.

L. Und werden da vielleicht auch noch oft und lange suchen und nichts finden. Doch hiervon ein andermal; jetzt zu unsern Figuren. — Finden sich nicht in der 6ten, 7ten 9ten und 10ten Figur manche Aehnlichkeiten?

S. O ja; in allen ist z. B. das Quadrat von einer geraden Linie gemacht; in der 6ten und 7ten das Quadrat von BC und in der 9ten und 10ten das Quadrat von AB.

L. Und

L. Und diese Quadrate sind auch in allen Figuren, so wie auch einige oder alle Seiten derselben in Theile getheilt worden?

S. Ja.

L. Allem Vermuthen nach werden also auch die Sätze, die wir bey der 9ten und 10ten Figur werden lernen können, mit den Sätzen, die wir bey der 6ten und 7ten Figur gefunden haben, ähnlich seyn.

S. (Der während des letzten aufmerksam die Figuren betrachtet hat.) Einige Aehnlichkeit sehe ich schon. In der 6ten und 9ten Figur ist das Quadrat der ganzen Linie zweyen Rechtecken, und in der 7ten und 10ten Figur vier andern Figuren gleich, aber diese viere kenne ich noch nicht genau. Die in der 10ten Figur scheinen mir zum Theil Quadrate zu seyn, aber behaupten will ich es nicht, ehe ichs nicht untersucht habe.

L. So ists recht.

S. (Nach einigem Nachdenken) In der 10ten Figur sind zwey Rechtecke und zwey Quadrate. Daß alle vier Figuren darinn rechtwinklige Parallelogramme sind, sieht man bald. Denn da CB ⧺ und ═ DF, und auch AH ⧺ und ═ BG, so ist auch CF ⧺ BD ⧺ AE, und HG ⧺ AB ⧺ ED, und ein jedes der Parallelogramme AI, CG, HF und ID hat einen Winkel von dem Quadrate AD und also einen rechten Winkel. Daß nun aber auch CG

und HF, denn die meinte ich vorher, Quadrate sind, beweise ich so. Es ist

CB = BG, weil sie gleich gemacht sind

und IG = CB } als gegenüber stehende
und CI = BG } Seiten eines Parallelograms

u. also CB = BG = IG = CI. Ferner ist

AB = HG = ED, als Parallelen zwischen Parallelen

und AE = CF = BD, aus gleichem Grunde

und AB = BD = ED = EA als Seiten eines Quadrats

also auch AE = ED = FC = HG. Da nun auch AH, FD, IG und IC unter einander gleich sind, denn alle diese Linien sind dem Stücke CB gleich, so ist auch

AE — AH = ED — FD = FC — IC = HG — IG d. h. HE = EF = FI = IH.

L. Das schwereste hätten Sie also bereits überstanden. Was sind aber die beyden Quadrate HF und CG für Quadrate?

S. Was für Quadrate das sind?

L. Ich meine, über was für Linien sie beschrieben sind.

S. Das Quadrat HF ist über der Linie EF und das Quadrat CG ist über der Linie IG beschrieben.

L. Wie aber, wenn ich mir jetzt weiter keine Linien gedächte, als AB, und deren beyde Theile AC und CB, und dann fragte, was HF und CG für Quadrate wären?

S.

S. CG könnte ich dann auch sagen ist über dem Stücke CB beschrieben, aber HF könnte ich doch nicht weiter beschreiben?

L. Ist denn nicht EF und AC einander gleich?

S. Das wohl, aber das Quadrat HF ist doch nicht über AC beschrieben.

L. Wenn aber über AC ein Quadrat beschrieben wäre, würde es dem Quadrate HF gleich seyn oder nicht?

S. Es würde allerdings demselben gleich seyn, denn beyde hätten ja einerley Seiten, und Quadrate unterscheiden sich bloß durch die Seiten.

L. Also könnte ich doch auch, wenn ich bloß auf die Größe sähe, anstatt des Quadrats HF wohl das Quadrat von AC sagen?

S. O ja!

L. Was sind also HF und CG nun für Quadrate?

S. Es sind die Quadrate der Theile von der linie AB.

L. Gleiche linien und überhaupt gleiche Dinge kann ich statt einander setzen, wenn dabey bloß auf die Größe gesehen wird, und wenn Sie die Theile Ihrer Figuren deutlich und gehörig beschreiben wollen, so dürfen Sie weiter nichts voraussetzen, als daß die linie AB und ihre beyden Theile AC und CB bekannt sind. Nun denken Sie nur noch darüber nach, wie Sie auch die andern rechtwinkligen Paralle-

logramme in der 9ten und 10ten Figur nach dieser Anmerkung beschreiben müssen, und dann wird sich das übrige bald finden.

S. (Denkt eine Weile nach) In der 9ten Figur sind die beyden Rechtecke AF und CD Rechtecke zwischen der ganzen Linie AB und ihren Theilen AC und CB, und in der 10ten sind die Rechtecke AI und ID Rechtecke zwischen den Theilen der Linie AB.

L. Sind diese Theile gleich oder ungleich?

S. Sie sind ungleich.

L. Nun erinnern Sie Sich an die Sätze, die wir gestern gehabt haben, und versuchen Sie die Sätze, welche wir durch die 9te und 10te Figur beweisen könnten, darnach zu finden und auszudrücken.

S. (Denkt eine geraume Zeit nach, wobey er die 6te und 7te Figur oft betrachtet) Nun habe ich zwey Sätze.

1. Wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß, als die beyden Rechtecke zwischen der ganzen Linie und den beyden ungleichen Theilen zusammen genommen.

2. Wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß als die beyden Quadrate der Theile, nebst dem doppelten Rechtecke zwischen den zwey Theilen der Linie.

L. Nebst dem doppelten Rechtecke sagen Sie?

S. Ja,

S. Ja, denn die Rechtecke AI und ID Fig. 10 sind ja einander gleich, und also sage ich lieber das doppelte Rechteck als daß ich jedes besonders nennte.

L. Warum sind denn diese gleich?

S. Da HI und IF gleich sind, so kann man diese beiden Linien so auf einander legen, daß sie sich decken. Nun ist AHI = GIF = R, und HAC = IFD = R. Wenn man also ferner die ganze Figur ID auf AI legt, so fällt IG auf HA und FD auf IC, und da IG = HA, und FD = IC, so fällt alsdann auch G auf A und D auf C, und die Rechtecke AI und ID decken sich also und sind gleich.

L. Von was für Stücken braucht man daher in zwey Rechtecken nur zu wissen, daß sie gleich sind, um sogleich die Gleichheit der ganzen Rechtecke behaupten zu können?

S. Von zwey Seiten, die einen Winkel einschliessen. Denn wenn diese in beyden Rechtecken gleich sind, so kann man dieselben allezeit so auf einander legen, daß sie sich decken.

L. Ein Quadrat ist doch auch ein Rechteck? freylich ein solches, wo alle Seiten einander gleich sind?

S. Ja.

L. Also sind zwey Quadrate gleich?

S. Wenn irgend eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist.

L. Hätten Sie das gestern schon gewußt, so hätten Sie bey der 7ten Figur kürzer, als

Sie

Sie thaten, beweisen können, daß die vier Quadrate EK, GI, HD und KC alle einander gleich sind. Denn Sie sagten EK = HD, weil beyde gleiche Grundlinien EH und HB haben, und zwischen einerley Parallelen liegen; ferner ist HD = KC, weil beyde ebenfalls gleiche Grundlinien BD und DC haben, und zwischen einerley Parallelen liegen; und aus einem ähnlichen Grunde ist KC = GI und GI = EK, und also alle vier Quadrate einander gleich. An dessen Statt können Sie nun sagen EK, HD, KC und GI sind gleich, weil sie Quadrate gleicher Linien sind.

S. Das ist viel kürzer.

L. Sie werden in der Folge noch mehr Beweise davon erhalten, daß man desto schneller urtheilen, und das Erkannte auch desto kürzer ausdrücken lerne, je weiter man kommt, und ausserdem werde ich Sie gleich noch auf einen andern wichtigen Vortheil einer fortgesetzten Betrachtung der Gegenstände, die man kennen lernen will, aufmerksam machen. Aber zuvor die Frage: Können wohl zwey Quadrate, die ungleiche Seiten haben, einander gleich seyn?

S. Nein, denn wenn man diese auf einander legte, so würde das, welches größere Seiten hat, auf zwey Seiten wenigstens über dem andern hervorstehen, und also auch größer seyn.

L. Wenn also zwey gerade Linien gleich sind, so sind ihre Quadrate?

S. Auch gleich.

L. Und wenn zwey Quadrate gleich sind, so sind ihre Seiten?

S. Auch gleich.

L. Wenn aber zwey Linien ungleich sind?

S. So sind auch ihre Quadrate ungleich, denn das Quadrat der grössern Seite ist grösser als das andere; und wenn zwey Quadrate ungleich sind, so sind auch die Seiten des grössern Quadrats grösser als die Seiten des kleinern.

L. So leicht diese Bemerkungen sind, so werden sie uns demohngeachtet in der Folge sehr zu statten kommen, und wir wollen sie also nicht gering schätzen. — Wie aber verhälts sichs in diesem Stücke mit den Rechtecken?

S. Diese sind auch ungleich, wenn die Seiten, welche einen Winkel einschließen, ungleich sind.

L. Also sind z. B. Fig. 11. die Rechtecke AI und IC ungleich? denn AG ist daselbst grösser als FC und AE kleiner als FI.

S. Nein, das geht nicht, denn AI und IC sind Ergänzungen der Parallelogramme EH und GF um der Diagonale DB, und die sind immer einander gleich.

L. Ihr Urtheil war also etwas zu schnell. Wenn Sie bey einem Rechtecke, so wie bey einem Quadrate, nur auf eine Linie zu sehen hätten,

hätten, dann würden Sie auch mit einem Male entscheiden können. So aber, da Sie dabey auf zwey Linien zu sehen haben, giebt es da nicht mehrere Fälle?

S. Nun sehe ich es wohl, daß ich mich übereilt habe. Wenn in zwey Rechtecken eine Seite gleich, und die andere ungleich ist, dann sind auch die Rechtecke ungleich. Auch findet das statt, wenn beyde Seiten in dem einem Rechtecke größer oder kleiner sind, als in dem andern; und zwar ist immer das Rechteck größer, wo die eine oder beyde Seiten größer sind. Wenn aber in dem einem Rechtecke die eine Seite größer und die andere kleiner ist, als in dem andern, so können die Rechtecke selbst gleich aber auch ungleich seyn.

L. Nun betrachten Sie diese Figur (Fig. 12.) Es ist die 10te mit einer kleinen Veränderung.

S. In dieser (12ten Fig.) sind in den Rechtecken AI und ID nur noch die Diagonalen AI und ID gezogen worden.

L. Und da ist also?

S. Das Dreyeck ACI = △ AHI, ferner △ IGD = △ IFD.

L. Sind unter diesen vier Dreyecken nicht etwa auch uugleiche?

S Nein, denn mir fällt hier noch ein anderer Beweis ein. Ich sagte, daß das Dreyeck ACI = △ AHI, und △ IGD = △ IFD sey, weil sie Theile von Parallelogrammen sind, welche die Diagonale getheilt hat. Aber ich kann auch so sagen: △ ACI

△ ACI = △ AHI = △ IGD = △ IFD
denn AC = HI = GD = IF
und CI = AH = IG = FD
und ACI = AHI = IGD = IFD = R.

L. Also die beyden Dreyecke ACI u. AHI zusammen genommen gegen die beyden Dreyecke IGD und IFD zusammen genommen gehalten?

S. Sind auch gleich. — So kann man ja auch beweisen, daß die Parallelogramme oder Rechtecke AI und ID gleich sind!

L. Allerdings, und Sie sollten diesen Beweis auch eben außer dem vorhergehenden kennen lernen; denn nicht wahr, vermittelst der Diagonalen können Sie nun von jeden zwey Rechtecken, in welchen zwey Seiten gleich sind, beweisen, daß die ganzen Rechtecke gleich sind, wenn sie gleich nicht so liegen, als in dieser Figur? (Fig. 12.)

S. O ja, denn auf die lage der Rechtecke AI und ID habe ich ja bey dem geführten Beweise gar nicht gesehen.

L. Also merken Sie Sich diesen Beweis, und betrachten Sie nun die 13te Figur.

S. Die ist ja gerade wieder so als die 10te, nur mit dem Unterschiede, daß darin die Diagonale EB gezogen ist. Aber ich merke schon, warum Sie mir dieselbe gegeben haben. Ich soll gewiß noch auf eine dritte Art beweisen, daß die beyden Rechtecke AI und ID gleich sind. Wenn das ist, so will ich bald fertig seyn. Die Rechtecke AI und ID sind gleich,

weil

weil sie Ergänzungen der Parallelogramme HF und CG um der Diagonale EB sind.

L. Wie schnell Sie meine Gedanken errathen haben, und wie bald Sie mit dem Beweise fertig geworden sind! So schnell wäre ich schwerlich selbst fertig geworden, wenn Sie mir diese Figur gegeben hätten.

S. Dann werde ich gewiß wieder etwas versehen haben.

L. Beym Eilen übereilt man sich bisweilen.

S. EB ist doch die Diagonale?

L. In dieser Figur (Fig. 14. a) ist AD auch ein Quadrat, und AI und ID Rechtecke; ist EB auch eine Diagonale?

S. EB ist ja nicht Eine Linie, sondern zwey, EI und IB.

L. Und wenn nun Fig. 13. EB auch so aus den beyden Stücken EI und IB zusammen gesetzt wäre, daß ich erst EI, und dann IB, also jede Linie besonders gezogen hätte? Nach dem Scheine dürfen Sie doch nicht urtheilen, und Sie haben ja nicht zugesehen, als ich die Figur gemacht habe.

S. Ich dachte meiner Sache ganz gewiß zu seyn, und nun sehe ich, daß ich mich betrogen habe.

L. Betrogen gerade nicht. Sollte man denn nicht, vorausgesetzt, daß Fig. 13. EG und HF Quadrate sind, beweisen können, daß die Linien EI und IB in einer geraden Linie liegen?

S. Wie soll man das anfangen?

L. Haben Sie davon nie ein Kennzeichen gelernt?

S. Ich

S. Ich kann mich nicht erinnern.

L. Auch nicht, wenn ich Ihnen sage, daß solches bey der Betrachtung der Nebenwinkel da gewesen?

S. Nein.

L. Es ist freylich schon lange her, daß wir davon gesprochen haben, und nach der Zeit hat sich noch keine Gelegenheit gefunden, von diesem Kennzeichen Gebrauch zu machen. Deswegen ist Ihnen solches ganz entfallen. Allein nach einer kurzen Wiederholung dessen, was wir von den Nebenwinkeln gehabt haben, werden Sie Sich dies Kennzeichen leicht wieder merken, und wenn Sie es angewandt haben werden, auch nicht so bald wieder vergessen.

(Der Lehrer stellt nun diese Wiederholung an, nimmt dabey erstlich kurz das, was in der Fortsetzung des Versuchs in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebnen Geometrie S. 23 bis 28 steht, und dann das S. 28 bis 30 folgende ausführlich vor, wodurch denn das Vergessene wieder gegenwärtig wird.)

Nun betrachten Sie die 13te Figur wieder. Was ist darin CG für eine Figur?

S. Ein Quadrat.

L. Und was sind darin die Dreyecke CIB und BIG für welche?

S. Rechtwinklige und gleichschenklige.

L. Wie viel rechten Winkeln sind in jedem Dreyecke alle drey Winkel gleich?

S. Zweyen.

L. Und wie groß also in einem rechwinkligen Dreyecke die beyden spitzen Winkel allein genommen?

S. So groß als Ein rechter.

L. Also sind auch in dem Dreyecke CIB die Winkel CIB und CBI zusammen genommen?

S. Einem rechten Winkel gleich.

L. Und ein jeder, da beyde als Winkel über der Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreyecke gleich sind?

S. So groß als ein halber rechter.

L. Wie groß ist nun BIG?

S. Auch so groß als ein halber rechter Winkel.

L. Und EIF?

S. Ebenfalls.

L. Und EIC?

S. So groß als Ein und ein halber rechter Winkel.

L. Und EIC und CIB zusammen genommen?

S. So groß als zwey rechte Winkel.

L. Und also?

S. Ja nun sehe ich wohl, daß EI und IB nur eine gerade linie ausmachen. Denn CI kann ich als einen Schenkel der beyden Winkel CIE und CIB betrachten, und da diese beyden Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind, so müssen die übrigen

gen Schenkel IE und IB in einer geraden Linie liegen.

L. Und nun wissen Sie also auch mit Gewißheit, daß die beyden Rechtecke AI und ID, wie beschaffen sind?

S. Einander gleich.

L. Nun können Sie also auch mit Gewißheit behaupten, daß, wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile theilt, das Quadrat der ganzen Linie so groß sey, als die beyden Quadrate dieser Theile, nebst dem doppelten Rechtecke, so zwischen ihnen eingeschlossen ist. Was meinen Sie nun wohl, ist dieser Satz bloß wahr, wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile getheilt hat, oder läßt er sich auch behaupten, wenn überhaupt eine Linie in zwey Theile getheilt ist? Ich meine, ob bloß, wenn eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile getheilt ist, oder auch, wenn überhaupt eine Linie in zwey Theile getheilt ist, diese Theile mögen nun gleich oder ungleich seyn, das Quadrat der ganzen Linie so groß ist, als die beyden Quadrate der Theile nebst dem doppelten Rechtecke, so zwischen den Theilen eingeschlossen ist?

S. Es ist dieser Satz ganz allgemein wahr, es mag die getheilte Linie in zwey ungleiche oder in zwey gleiche Theile getheilt seyn. Allein wenn eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilt ist, so sind die beyden Quadrate der Theile nicht nur einander gleich, sondern

die Rechtecke zwischen den Theilen werden alsdann Quadrate, und auch so groß, als die Quadrate der Theile, und alles sind Quadrate der Hälfte der gegebenen Linie; und also gilt dann eigentlich der Satz, den wir schon gehabt haben, daß das Quadrat einer ganzen Linie viermal so groß sey, als das Quadrat der Hälfte dieser Linie.

L. Gesetzt wir hätten diesen Satz noch nicht gehabt, so könnten wir denselben aus dem vorhergehenden als eine Folge herleiten. Ueberhaupt kann man, wenn man erst einen Satz allgemein bewiesen hat, dadurch, daß man die gegebenen Dinge nach und nach bald so, bald so annimmt, aus dem allgemeinen Satze viel besondere Sätze herleiten, und diese Beschäftigung ist zugleich sehr nützlich, weil nicht das allgemeine, sondern das besondere dasjenige ist, was wir im gemeinen Leben anwenden können und müssen. Doch weiter. — Bisher haben wir immer eine gerade Linie in zwey Theile getheilt, nun wollen wir einen Versuch machen, ob wir nicht etwas neues lernen können, wenn wir sie in mehr Theile theilen. Fig. 14 ist fürs erste eine gerade Linie AB in 3 gleiche Theile AC, CD, DB getheilt, was werden Sie damit machen?

S. Ich mache erst das Quadrat der ganzen Linie AB, und dann ziehe ich aus C und D parallele Linien mit den Seiten, so erhalte ich

Fig.

Fig. 15 das Quadrat AF und die Rechtecke AG, CH und DF.

L. Was sind das für Rechtecke?

S. Es sind Rechtecke zwischen der ganzen Linie und den Theilen derselben.

L. Wie sind sie unter einander verglichen beschaffen?

S. Sie sind alle drey gleich, denn sie werden von gleichen Seiten eingeschlossen.

L. Also wird das eine dreymal genommen auch wohl so groß seyn, als alle drey?

S. Ja.

L. Und was hätten wir hier also für einen Satz?

S. Wenn eine gerade Linie in drey gleiche Theile getheilt worden ist, so ist das Quadrat der ganzen Linie dreymal so groß, als das Rechteck, welches zwischen der ganzen Linie und dem Drittheile derselben enthalten ist.

L. Dieser Satz ist sehr leicht, und vielleicht können Sie mir nun schon ohne Figur sagen, was statt finden werde, wenn man eine gerade Linie in vier gleiche Theile theilt.

S. Dann ist das Quadrat der ganzen Linie viermal so groß, als das Rechteck, welches zwischen der ganzen Linie und dem einen Theile derselben enthalten ist

L. Und wenn man sie in fünf gleiche Theile theilt?

S. Dann ist das Quadrat der ganzen Linie fünfmal so groß, als das Rechteck, welches

ches zwischen der ganzen Linie und dem einen Theile derselben enthalten ist.

L. Auf eine ähnliche Art kann man, wie Sie von selbst sehen werden, nun immer weiter fortgehen. Doch damit wir zu neuen Sätzen kommen, was meinen Sie, was wir nun zu thun haben werden?

S. Wir müssen nun die Linie A E auch in drey gleiche Theile theilen, und aus den Theilungspunkten Parallellinien mit A B ziehen.

L. Thun Sie es. (Der Schüler thut es, und es entsteht die 16te Figur.) Was glauben Sie nun behaupten zu können?

S. Daß das Quadrat der ganzen Linie neunmal so groß sey, als das Quadrat des dritten Theils derselben.

L. Wie aber, wenn eine gerade Linie in vier gleiche Theile getheilt wärr?

S. Denn wäre das Quadrat der ganzen Linie sechszehnmal so groß, als das Quadrat eines Theils.

L. Und wenn man sie in fünf gleiche Theile theilte?

S. Dann wäre das Quadrat der ganzen Linie fünf und zwanzigmal so groß, als das Quadrat eines Theils.

L. Auch bey diesen Sätzen werde ich nicht nöthig haben länger zu verweilen; sie sind leicht, aber sehr nützlich wird es seyn, daß wir sie uns hier deutlich gedacht haben. — Wie ist die Linie A B Fig. 17 getheilt?

S.

S. Sie ist in drey ungleiche Theile getheilt.

L. Wie viel linien kann man sich wohl bey der linie AB Fig. 17 gedenken?

S. Viere, nemlich die ganze linie AB, und die drey Theile AC, CD, und DB.

L. Mich dünkt sechse.

S. Wie so?

L. Zuerst die drey Theile AC, CD und DB einzeln genommen, dann AD und CB, je zwey und zwey zusammen, und endlich die ganze linie AB.

S. Es ist wahr, ich hatte daran nicht gedacht, daß ich auch je zwey und zwey Theile zusammen nehmen könnte.

L. Sind nun auch die gedachten sechs Theile alle einander ungleich?

S. Zwey scheinen gleich, nemlich AC und CB.

L. Jetzt wollen wir uns einmal vorstellen, daß die linie AB erst in C in zwey gleiche, und dann in D in zwey ungleiche Theile getheilt sey, und uns um die übrigen Theile nicht bekümmern. Was werden wir unter dieser Voraussetzung mit der linie anfangen können, wenn wir sie auf eine ähnliche Art behandeln wollen, als bisher mit ähnlichen linien geschehen ist?

S. (Indem er die 18te Figur zeichnet) Erst mache ich das Quadrat der ganzen linie, und ziehe dann aus den Puncten C und D mit der linie AF die Parallellinien CG und DH.

Ferner theile ich die Seite A F des Quadrats der ganzen linie (der Schüler zeichnet nunmehr die 19te Figur) in I in zwey gleiche Theile und in K in zwey ungleiche, so wie die linie A B getheilt ist, und zieht aus den Puncten I und K mit A B Parallellinien.

L. Gut, nun haben wir wieder eine Figur, die 19te meine ich, welche uns etwas zum Ueberlegen geben wird. Aber damit Ihnen die anzustellende Untersuchung nicht zu schwer werde, so will ich Ihnen hier (Fig. 20) eine andere Zeichnung geben, welche sich von der 19ten Figur nur darin unterscheidet, daß daselbst verschiedenes weggelassen ist. — Was bemerken Sie also in dieser Zeichung (Fig. 20) für Figuren?

S. Zwey Quadrate und dann sechs Rechtecke.

L. Welches sind die Quadrate?

S. D M und N Q.

L. Was ist denn C L?

S. Auch ein Quadrat, und also sind drey Quadrate darinn.

L. Wie werden Sie wohl diese Quadrate mit Worten beschreiben?

S. C L ist das Quadrat der Hälfte der gegebenen linie; D M das Quadrat des einen von den ungleichen Theilen, und N Q — — ja wie beschreibe ich das?

L. Nicht wahr, N Q ist das Quadrat der linie C D?

S. Ja,

S. Ja, denn CD und NP sind gleich, und NQ ist das Quadrat von NP.

L. Was sind denn wohl die Puncte C und D für Puncte?

S. Die Theilungspuncte.

L. Und die Linie, welche dazwischen liegt heißt?

S. CD.

L. Und was ist also CD für eine Linie?

S. Die Linie zwischen den Theilungspuncten.

L Und was ist nun NQ für ein Quadrat, da man es das Quadrat der Linie CD nennen kann?

S. Das Quadrat des Stücks, so zwischen den Theilungspuncten enthalten ist.

L. Diese Beschreibungen merken Sie Sich. — Welches sind denn nun aber die sechs Rechtecke, welche Sie in dieser (der 20ten) Figur zu finden glauben?

S. AN, CP, PL, AP, CM und DL.

L. Sind darunter nicht etwa gleiche?

S. Ja, AN = CM.

L. Warum?

S. Es sind Rechtecke, die gleiche Grundlinien haben, denn KN = NM, und zwischen einerley Parallelen KM und AB liegen.

L. Sind sonst keine gleich?

S. Ja, CP ist auch gleich PL.

L. Wie denn das?

S. Es sind Ergänzungen zweyer Parallelogramme, die um der Diagonale liegen.

L. Ich sehe ja hier gar keine Diagonale.

S. Es ist freylich keine gezogen, allein da DM und NQ Quadrate sind, so kann man von B bis O eine gerade Linie ziehen, die durch P geht, denn es verhält sich hier eben so, als bey der 13ten Figur.

L. Sehr gut, das habe ich nicht geglaubt, daß Sie Sich hier so gut zu helfen wissen würden. Also ist hier CP gleich?

S. CP = PL.

L. Und nun CM gegen DL gehalten.

S. Diese Rechtecke sind auch gleich, denn man erhält sie, wenn man zu den gleichen Rechtecken CP und PL das Quadrat DM nimmt.

L. Wie sind denn nun die Rechtecke AN und DL in Vergleichung mit einander beschaffen?

S. Sie sind gleich, denn DL gleich CM und CM gleich AN, also muß DL auch AN gleich seyn.

L. Setzen Sie doch einmal zu diesen beyden Rechtecken das Rechteck CP, und sagen Sie mir, was dann behauptet werden könne?

S. Das Rechteck AP ist gleich der Figur CBLQPN.

L. Das ist ein Stück von dem Quadrate der Hälfte der gegebenen Linie. Was müßte

man

man noch dazu setzen, wenn man daraus das ganze Quadrat der Hälfte machen wollte?

S. Das Quadrat NQ oder das Quadrat des Stücks, welches zwischen den Theilungspuncten enthalten ist.

L. Was ist AP für ein Rechteck?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen der Linie AB.

L. Ist dieses Rechteck also so groß als das Quadrat der Hälfte?

S. Nein es ist um das Quadrat des Stücks zwischen den Theilungspuncten kleiner als dasselbe.

L. Wenn man also eine gerade Linie in zwey gleiche, und zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen?

S. Kleiner als das Quadrat der Hälfte und zwar um das Quadrat desjenigen Stücks so zwischen den Theilungspuncten enthalten ist.

L. Dies ist ein sehr wichtiger Satz, und man kann ihn, wie Sie leicht einsehen werden, auch so ausdrücken: wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen nebst dem Quadrate des Stücks, so zwischen den Theilungspuncten enthalten ist, so groß als das Quadrat der Hälfte dieser Linie. — So weit heute. Noch dürfen wir zwar die 19te und 20te Figur nicht

verlassen, indeß will ich Sie nicht zu sehr anstrengen, und also lieber das noch übrige bis zu unserer nächsten Unterredung verschieben.

Drittes Gespräch.

L. Heute haben wir uns also, nach dem, was ich beym Schlusse unserer letzten Unterredung sagte, fürs erste noch mit der 20ten Figur zu beschäftigen. Wie heißt der Satz, den wir durch die Betrachtung derselben gelernt haben?

S. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen nebst dem Quadrate des Stücks, so zwischen den Theilungspuncten liegt, so groß als das Quadrat der Hälfte.

L. Gesetzt, Sie wüßten noch nicht, ob dieser Satz wahr sey oder nicht, es würde Ihnen aber derselbe gesagt, und Sie wollten untersuchen, ob er wahr sey, und Sich diese Untersuchung durch eine Figur erleichtern; was würden Sie alsdann thun?

S. Ich zöge mir zuerst eine gerade Linie, und theilte sie so wohl in zwey gleiche, als in zwey ungleiche Theile, so wie in der 17ten Figur. Dann machte ich das Rechteck der beyden ungleichen Theile, und auch das Quadrat

der

der Hälfte. Ich will es Ihnen hier zeigen.
(Der Schüler zeichnet die 21te Figur.)

L. Hätten Sie nun schon alles in dieser Figur, was in dem Satze vorkommt?

S. (Nach einigem Nachdenken) Nein, es fehlt mir noch das Quadrat der Hälfte. Um dieses zu erhalten, verlängerte ich also die Linie DE bis an die Seite HG, so wie hier (Fig. 22.)

L. Würden Sie, wenn alles dies geschehen wäre, wohl den Beweis führen können?

S. Noch nicht, ich müßte auch noch die Linie FE bis nach der Seite BG verlängern, denn eben das war in der 20ten Figur geschehen.

L. Das könnten Sie wohl sagen, wenn Sie Sich die 20te Figur zum Beyspiele vorsetzen sollten, allein ich habe vorher ausdrücklich gesagt, daß Sie Sich vorstellen sollten, als hätten wir uns noch nicht über den angeführten Satz unterredet.

S. Dann habe ich freylich keinen Grund, die Linie FE zu verlängern; allein dann werde ich auch schwerlich den Beweis führen können.

L. Geben Sie die Hoffnung dazu noch nicht auf, sondern überlegen Sie erst sorgfältig.

S. (Denkt eine Zeitlang nach) Ja es geht doch. Denn da Rechtecke gleich sind, wenn darin zwey Seiten, die einen Winkel einschliessen, gleich sind, so ist

FC = DG weil
AF = DB und
AC — BG. Setze ich nun zu beyden das Rechteck CE hinzu, so wird:
AE = BGIEK, und nun fällt in die Augen, daß
AE + KI = CG, oder das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen nebst dem Quadrate des Stücks, so zwischen den Theilungspuncten enthalten ist, gleich sey dem Quadrate der Hälfte.

L. Der Beweis ist ganz recht geführt, wenn das voraus gesetzt wird, daß CE und DG Rechtecke, und KI das Quadrat der Hälfte sey. Da wir die Art, wie dies gezeigt werden kann, schon gehabt haben, so wollen wir uns jetzt dabey nicht weiter aufhalten. Aber dagegen vergleichen Sie den jetzigen Beweis mit dem gestrigen; welcher ist wohl der beste?

S. Der, den ich jetzt geführt habe, denn der Beweis selbst ist kürzer, und überdem habe ich auch in der 22ten Figur eine Linie weniger als in der 20ten, und das macht ihn ebenfalls leichter. Auch gefällt mir das, daß ich nun von jeder Linie in der 22ten Figur den Grund, warum ich sie gezogen habe, angeben kann, das hätte ich bey der 20ten Figur nicht gekonnt.

L. Also ist es doch wohl gut, daß wir heute nicht so gleich zu einem neuen Satze fortgegangen sind?

S. O ja, denn nun weiß ich den durchgenommenen Satz viel besser, als vorher.

L. Man nennt die Wiederholung sprüchwörtlich die Mutter des Studirens, oder der Kenntnisse. Wie das eigentlich zu verstehen sey, können Sie aus Ihrer jetzigen Erfahrung abnehmen. Man nennt die Wiederholung so, nicht, weil man dadurch vor dem Vergessen des Erlernten bewahrt wird, sondern weil man, es versteht sich, durch eine zweckmäßige Wiederholung, seine einmal erworbene Kenntnisse vollständiger, deutlicher und gewisser macht. Deswegen sagt man auch, daß man durchs lehren lerne. Wer lehren will, muß das, was er lehren will, schon inne haben, sonst gleicht er einem Blinden, der einem andern den Weg weisen will; aber indem man als Lehrer das, was man schon gelernt hat, wieder durchdenken muß, so sieht man an den Gegenständen bald diese bald jene neue Seite, betrachtet dieselbe in mehreren Verbindungen, unter mehrern Umständen, und so kann es nicht fehlen, es müssen durch diese wiederholte Ueberdenkung des bereits bekannten die Kenntnisse vollständiger, deutlicher, richtiger und gewisser werden. Ziehen Sie Sich daraus die Regel, daß Sie auch selbst die bekanntesten Dinge mit Vortheil von neuem durchdenken können, aber merken Sie Sich auch das Kennzeichen einer guten Wiederholung. Weiter muß man dadurch in seinen Kenntnissen kommen, sonst hat

man

man etwas dabey versehen. Die 19te Figur mit der 20ten, 21ten und 22ten verglichen, könnte mir zur Bestätigung des gesagten, noch eine andere Betrachtung an die Hand geben; indeß ist dieselbe für Sie jetzt noch etwas zu schwer, und ich will sie also bis zu einer andern Zeit verschieben. — Jetzt gebe ich Ihnen den Satz: wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt, und dann nach Willkühr dieselbe verlängert, so ist das Rechteck zwischen der Verlängerung und der ganzen Linie (die Verlängerung nemlich mit der zuerst angenommenen Linie zusammen genommen, heißt hier die ganze Linie) nebst dem Quadrate der Hälfte so groß, als das Quadrat der Linie, welche der Hälfte und der Verlängerung zusammen genommen, gleich ist. Ich will mich an einer Figur erklären. Fig. 23 ist AB in C in zwey gleiche Theile getheilt, BD nach Willkühr hinzugesetzt, und es soll nun

AD × BD + CBq = CDq. Das q

hinter CB und CD bezeichnet das Quadrat, so daß CBq das Quadrat von CB bedeutet. Versuchen Sie diesen Satz zu beweisen.

S. (Zeichnet indem er spricht die 24te Figur) Nun muß ich erst das Rechteck zwischen AD und BD machen, und dies ist AF; dann das Quadrat der Hälfte und der Linie CD. Erst mache ich das Quadrat von CD, welches CI wird, und dann ziehe ich BK ⧺ CH, so wird GK das Quadrat der Hälfte.

L. Wie so?

S. Es ist GF = CD = HI als Parallelen zwischen Parallelen: ferner BD = LF = AE = BL, denn BD und AE sind gleich gemacht, und BD und LF, desgleichen AE und BL sind Parallelen zwischen Parallelen;

also ist GF — LF = BK — BL

oder GL = LK. Daß die Winkel in GK aber rechte Winkel sind, läßt sich eben so beweisen, als ich es schon in ähnlichen Figuren bewiesen habe.

L. Das wäre denn die Vorbereitung zum Beweise, und der Beweis selbst?

S. Es ist das Rechteck CF = dem Rechteck BI

weil CD = DI, als Seiten Eines Quadrats

und CG = BD, denn BD = AE, und AE = CG.

Ferner ist das Rechteck AG = dem Rechtecke CL, weil sie gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallelen liegen.

Also ist CF + AG = BI + CL

oder AF = CDIKLG. Setzt man nun zu beyden Figuren noch CBq oder GK, so erhält man

AF + GK = CI

oder AD x BD + CBq = CDq.

L. Sie haben diesen Beweis sehr gut geführt, und ich habe daher so wohl zu dem jetzigen als zu dem vorhergehenden Satze nichts weiter hinzuzusetzen, als daß beyde sehr wich-

tige Sätze sind, deren Anwendung uns in der Folge sehr nützlich seyn wird. — Was glauben Sie aber nun, daß folgen werde? Sollte es bey Linien die in zwey gleiche und zwey ungleiche Theile getheilt sind, oder bey denen, die erst in zwey gleiche Theile getheilt und dann verlängert sind, wohl noch etwas zu bemerken geben, oder müssen wir nun zur Betrachtung anderer Gegenstände fortgehen?

S. Ich glaube, daß wir das letztere thun müssen.

L. Nehmen Sie noch einmal die Linie A B (Fig. 17) die in C in zwey gleiche und in D in zwey ungleiche Theile getheilt ist. Sie haben doch aus einem Puncte einer geraden Linie eine senkrechte Linie auf derselben errichten gelernt?

S. Ja.

L. Und gelernt doch auch, um davon in vorkommenden Fällen Gebrauch zu machen?

S. Also soll ich wohl auf A B in C und D zwey senkrechte Linien errichten?

L. Thun Sie es immer, wenn Sie auch gleich noch nicht sehen, wohin Sie das führen, oder ob es Ihnen etwas helfen werde. Sie haben wenigstens schon oft erfahren, daß die Anwendung der erlernten Aufgaben und Lehrsätze verbunden mit den im Anfange durchgenommenen Regeln zu neuen Behauptungen führet. Machen Sie daher einen Versuch, und ist er vergeblich, so bedenken Sie, daß man auch sonst bisweilen vergeblich suche, ohne

ne sich deswegen vom Suchen überhaupt abhalten zu lassen.

S. (Nachdem er die 25te Figur gezeichnet hat) Ich habe es nun gethan, aber helfen wird es wohl nichts.

L. Gesetzt aber, daß Sie die in C aufgerichtete senkrechte Linie so groß machten, als AC oder die Hälfte von AB ist, und dann nach den Ihnen bekannten vorhin gedachten Regeln handeln wollten, was würden Sie dann für eine Figur erhalten?

S. Dann zöge ich von dem andern Endpunkte dieser senkrechten Linien nach A und B gerade Linien. Ich will es doch thun. Hier (Fig. 26) ist es geschehen.

L. Was haben Sie nun für Figuren?

S. Drey Dreyecke, und ein Trapezium. Die Dreyecke sind ACE, CEB und AEB, und das Trapezium ist CDFE.

L. Was sind die gedachten Dreyecke für welche?

S. (Nach einigem Nachdenken) Die beyden Dreyecke ACE und ECB sind rechtwinklige und gleichschenklige Dreyecke; denn ACE = ECB = R und AC = CE = CB.

L. Wie sind denn wohl AE und EB gegen einander gehalten, beschaffen?

S. Sie sind gleich, denn die Dreyecke ACE und ECB sind gleich, weil darin zwey Seiten und der Winkel den sie einschliessen gleich sind.

L. Also ist das Dreyeck AEB?

S. Ein gleichschenkliges Dreyeck.

L. Nicht auch ein rechtwinkliges?

S. Das weiß ich nicht.

L. Wie groß ist in einem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreyecke ein jeder Winkel über der Grundlinie?

S. So groß als ein halber rechter Winkel.

L. Und zwey halbe rechte Winkel machen doch wohl einen ganzen?

S. Nun sehe ich es schon, daß das Dreyeck AEB auch ein rechtwinkliges Dreyeck ist, denn die Winkel AEC und CEB sind jeder so groß als ein halber rechter Winkel, und beyde zusammen genommen machen den einen Winkel in dem Dreyecke AEB.

L. Da wir hier also drey rechtwinklige und gleichschenklige Dreyecke haben, so wird es uns an Behauptungen nicht fehlen, wenn wir den pythagorischen Lehrsatz anwenden werden. Allein dies wollen wir noch ein paar Augenblicke verschieben, denn das Trapezium ECDF möchte uns in der Untersuchung aufhalten. Theilen Sie dieses lieber erst in bekannte Figuren.

S. Wie macht man das?

L. Ziehen Sie einmal aus F eine Parallele mit CD.

S. Hier (Fig. 27) ist es geschehen.

L. Was haben Sie nun noch für Figuren erhalten?

S. Ein

S. Ein Parallelogramm oder vielmehr ein Rechteck GFDC und ein Dreyeck EGF.

L. Was ist das Dreyeck EGF für eins?

S. (Nach einigem Nachdenken) Ein rechtwinkliges und gleichschenkliges. Denn EGF ist ein rechter Winkel, und da $GEF = \frac{1}{2}R$, so muß auch $GFE = \frac{1}{2}R$ seyn, und folglich ist auch $EG = GF$.

L. Das Dreyeck FDB haben Sie ganz vergessen.

S. Das ist auch ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreyeck. Denn FDB ist ein rechter Winkel, und da $FBD = \frac{1}{2}R$, so ist auch $DFB = \frac{1}{2}R$ und also $FD = DB$.

L. Und die Catheten der Dreyecke AEC und ECB sind was für Linien?

S. Hälften der gegebenen Linie AB.

L. Und die Catheten des rechtwinkligen Dreyecks FDB?

S. Gleich dem kleinern von den beyden ungleichen Theilen der Linie AB.

L. Und endlich die Catheten des Dreyecks EGF.

S. Gleich dem Stücke der Linie AB, welches zwischen den Theilungspunkten liegt.

L. Dies suchen Sie stets vor Augen zu behalten, und nun versuchen Sie den pythagorischen Lehrsatz anzuwenden.

S. Das Quadrat von AE ist gleich dem doppelten Quadrate von EC oder AC, das Quadrat von EB ist gleich dem doppelten

Quadrate von EC oder CB, das Quadrat von EF ist gleich dem doppelten Quadrate von EG oder GF oder CD, und das Quadrat von FB ist gleich dem doppelten Quadrate von FD oder DB.

L. Drücken Sie diese Behauptungen lieber so aus, daß Sie weiter nichts als die gerade Linie AB mit ihren Hälften und beyden ungleichen Theilen und dem zwischen den Theilungspunkten enthaltenen Stücke voraussetzen.

S. Dann ist das Quadrat von AE, so wie auch das Quadrat von EB gleich dem doppelten Quadrate der Linie AB, das Quadrat von EF gleich dem doppelten Quadrate des Stücks, so zwischen den Theilungspunkten liegt, und das Quadrat von FB gleich dem doppelten Quadrate des kleinern von den beyden ungleichen Theilen.

L. So weit ist alles recht gut, allein zu einem eigentlichen Satze sind wir noch nicht gekommen. So bald dies seyn soll, so müssen Sie in allen Ihren Behauptungen keine andere Benennungen gebrauchen, als die gegebene Linie, ihre Hälfte, ihre beyden ungleiche Theile, und das Stück, so zwischen den Theilungspunkten liegt.

S. Das werde ich schwerlich können.

L. Von AE und EB, und EF und FB werden Sie ohne eine Brücke, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, wohl schwerlich zu den Linien AC, CB, AD, CD und DB übergehen können. AF (Fig. 28) mag einmal diese Brücke seyn. Ist diese AF nicht die Hypothenuse

thenuse von einem oder mehrern rechtwinkligen Dreyecken?

S. Ja die Linie AF ist die Hypothenuse von den beyden rechtwinkligen Dreyecken AEF und AFD.

L. Gut. Wenden Sie also von neuem den pythagorischen Lehrsatz an.

S. Es ist also

$$AFq = AEq + EFq$$

und $AFq = ADq + FDq$.

L. Was folgt daraus?

S. $AEq + EFq = ADq + DFq$.

L. Und AEq ist nach dem vorhergehenden gleich?

S. 2 ACq.

L. Und EFq?

S. Gleich 2 CDq.

L. Also können Sie anstatt $AEq + EFq = ADq + DFq$ auch sagen?

S. $2ACq + 2CDq = ADq + DFq$.

L. Das hiesse, mit Worten ausgedrückt?

S. Das doppelte Quadrat der Hälfte nebst dem doppelten Quadrate des Stücks, so zwischen den Theilungspunkten enthalten ist, ist gleich den beyden Quadraten der ungleichen Theile zusammen genommen.

L. Und um den ganzen Satz vollständig auszudrücken, so ist, wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche und zwey ungleiche Theile theilt?

S. Das doppelte Quadrat der Hälfte nebst dem doppelten Quadrate des zwischen den Theilungspunkten enthaltenen Stücks, gleich den beyden Quadraten der ungleichen Theile zusammen genommen.

L. Ehe wir weiter gehen betrachten Sie noch einmal die 26te, 27te und 28te Figur, und sagen Sie mir, aber nach vorhergegangener Ueberlegung, wie Sie nunmehr die Vorbereitung machen würden, wenn man Ihnen den Beweis des eben durchgenommenen Satzes aufgäbe.

S. (Nach einigem Nachdenken) Ich errichtete zuerst aus C über A B eine senkrechte Linie, und machte dieselbe so groß als die Hälfte von A B, dann zöge ich die Linien A E und E B, und nun errichtete ich auch aus D eine senkrechte Linie über A B bis an die Linie E B und zöge endlich A F.

L. Gut. Weiter will ich den durchgenommenen Satz nicht wiederholen, indem ich glaube, daß Sie ihn ganz gefaßt haben werden. Aber nun stellen Sie Sich wieder vor, daß Sie von diesem Satze noch nicht das geringste gehört hätten, und daß man von Ihnen verlangte, daß Sie ihn beweisen sollten; wie würden Sie das anfangen?

S. (Sinnt erst eine Weile nach) Dann zöge ich eine gerade Linie A B und theilte sie in C in zwey gleiche und in D in zwey ungleiche Theile. Nun machte ich (man vergleiche die 29te Figur) von A C das Quadrat A F und

von

von CB das Quadrat CG, so hätte ich in AG das doppelte Quadrat der Hälfte. Aber nun das doppelte Quadrat von CD, wo soll ich das machen? — Weiter kann ich nicht kommen.

L. Vielleicht fände sich das doppelte Quadrat von CD von selbst, wenn Sie die übrigen im Satze bestimmten Quadrate machten, und noch hätten Sie also nicht nöthig gehabt, still zu stehen. Indeß wäre es ja auch wohl angegangen, daß man das 2te Quadrat, so an das Quadrat AF gesetzt hätte, als es Fig. 30 geschehen ist; nicht wahr?

S. O ja! Aber würde das was geholfen haben?

L. Machen Sie, um Sich davon zu überzeugen, das Quadrat von AD.

S. (Der Schüler thut es, und es entsteht die 31te Figur)

L. Wie, wenn Sie nun auch DK und GH verlängerten, bis sie sich schnitten?

S. Ich will es thun (Es wird die 32te Figur gezeichnet) Nun habe ich in AH das doppelte Quadrat von AC oder der Hälfte der gegebenen linie, in AL das Quadrat von AD oder des größern Theils, in ML das Quadrat von CD oder dem zwischen den Theilungspunkten enthaltenen Theile; allein ich gebrauche das doppelte Quadrat des zwischen den Theilungspunkten enthaltenen Theils, und auch noch das Quadrat von DB oder dem andern Theile der gegebenen linie.

L. Also führte uns dieser Weg, so gut er bey den in der letzten Unterredung durchgenommenen Sätzen war, hier nicht zum Ziele? Und Sie würden also auch wohl schwerlich ohne Hülfe den gehabten Beweis finden können? — Gleichwohl muß man in der Mathematik durch das vorhergehende immer in den Stand gesetzt werden, die Beweise der zunächst folgenden Sätze ohne weitere Hülfe zu finden. Vielleicht fehlt es Ihnen nur an Zeit zum Nachdenken, ich will Ihnen also dieselbe geben und morgen erst weiter mich mit Ihnen unterreden.

Viertes Gespräch.

L. Haben Sie bey Ihrem Nachdenken über die 32te Figur einen andern Beweis für den gestrigen Satz gefunden?

S. So viel Mühe ich mir auch gegeben habe, so ist doch alle mein Suchen vergeblich gewesen.

L. Gesetzt, daß Sie einen andern Beweis gefunden hätten, würde derselbe wohl kürzer und besser gewesen seyn, als der, den Sie gestern kennen gelernt haben?

S. Ich glaube nicht, wenigstens ist die 32te Figur viel zusammengesetzter als die 28te.

L. Und eben deswegen würde auch der Beweis, wenn einer möglich wäre, zusammengesetzter und also nicht so leicht zu fassen gewesen seyn, als der gestrige. Lassen Sie Sich das also nicht zu sehr dauren, daß Sie vergeblich gesucht haben. Denn hätten Sie gefunden, so wäre doch das, was Sie gefunden häten, nicht besser gewesen, als das, was Sie schon kannten. Damit aber Ihre Mühe nicht in aller Absicht vergeblich gewesen seyn möge, so ziehen Sie Sich aus der Betrachtung der Art des bey der 28ten Figur geführten Beweises die Regel, daß man zur sinnlichen Vorstellung mancher Figuren nicht allezeit nöthig habe, die Figuren selbst zu zeichnen, sondern daß es auch hinreichend sey, dasjenige nur sich sinnlich zu machen, wobey man sich leicht diese Figuren selbst vorstellen kann. Um sich zum Exempel Quadrate bequem vorstellen zu können, darf man nur eine Seite derselben zeichnen. Wenn dies vorausgesetzt wird, so kann man den Beweis für den gestern durchgenommenen Satz aus dem Satze selbst leicht herleiten, oder wenigstens die dazu nöthige Figur leicht finden. Sie sollen Sich davon bey einem andern ähnlichen Satze überzeugen. Versuchen Sie also diesen Satz zu beweisen. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt und ihr eine andere in gleicher Richtung

tung ansetzt; so ist das Quadrat der aus der ganzen und der angesetzten bestehenden Linie nebst dem Quadrate der angesetzten dem zwiefachen Quadrate der halben und der aus der halben und der angesetzten bestehenden Linie gleich. Wie glauben Sie, daß Sie die zum Beweise dieses Satzes nöthige Figur werden entwerfen müssen?

S. Ich ziehe (Man sehe die 33te Figur) zuerst eine gerade Linie A B, theile dieselbe in C in zwey gleiche Theile, und verlängere alsdann die Linie bis in D. Nun brauche ich die Seite des zwiefachen Quadrats der halben Linie, und diese erhalte ich, wenn ich aus C die senkrechte Linie C E = A C errichte, und A E oder E B ziehe; ferner die Seite des zwiefachen Quadrats der Linie C D. — — Wie werde ich aber diese erhalten?

L. Wie erhalten Sie die Seite des zwiefachen Quadrats einer Linie?

S. Ich errichte über derselben ein Quadrat und ziehe dann die Diagonale.

L. Thun Sie dies also.

S. (Zeichnet die 34te Figur)

L. So werden wir schwerlich zu Stande kommen, denn die Linien, welche wir gebrauchen, haben in dieser Figur nicht die gehörige Verbindung. Um diese zu erhalten denken Sie Sich einmal das Quadrat von C D so gelegt, daß F in E und F G mit C D parallel sey, so wie in dieser (der 35ten) Figur.

S.

S. Nun sehe ich es wohl, nun verlängere ich die Linie EB bis nach G, und dann ist EB die verlangte Linie.

L. Wenn EB verlängert anders gerade in den Punct G mit FG zusammentrifft!

S. Das muß statt finden. Dann CEB ist ein halber rechter Winkel, und wenn man in einem Quadrate die Diagonale zieht, so theilt dieselbe die Winkel, zwischen deren Spitzen sie gezogen ist, in zwey halbe rechte Winkel.

L. Aber die Linien AE und EG sind noch nicht genug mit einander in Verbindung.

S. Da darf ich nur die Linie AG ziehen, so werden sie Seiten eines Dreyecks.

L. Und was für eines Dreyecks?

S. Eines rechtwinkligen Dreyecks, denn AEB ist gleich einem rechten Winkel, weil $AEC = CEB = \frac{1}{2}$ R.

L. Ob Sie doch nun wohl den Beweis schon werden führen können.

S. Es ist: Fig. 35a.

$AEq = 2\,ACq.$

und $EGq = 2\,CDq.$

Da nun $AGq = AEq + EGq$

so ist $AGq = 2\,ACq + 2\,CDq.$

L. Wie weiter?

S. Vielleicht habe ich noch etwas vergessen.

L. Was für Seiten von Quadraten müssen Sie nach dem zu beweisenden Satze noch haben?

S.

S. Die Seite AD und BD. — Nun sehe ich es schon. BD und DG sind gleich, weil BGD = ½ R und BDG = R ist, denn deswegen ist GBD auch ½ R. Nun ist AG auch die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreyecks ADG und also auch

AGq = ADq + BDq. Da nun auch AG = 2ACq + 2CDq, so ist

ADq + BDq = 2ACq + 2CDq, und das ist das, was nach dem angeführten Satze zu beweisen war.

L. Ist nun aber nicht in der Figur eine oder die andere Linie überflüßig?

S. Ja die Linien CH und HG hätten können wegbleiben.

L. Gesetzt also, daß Sie nun noch einmal die Figur zeichnen sollten, wie würden Sie Sich verhalten?

S. Ich errichtete über C die senkrechte Linie CE = AC, zöge AE und EB und verlängerte diese letztere. Dann zöge ich aus E ⊥ und = CD die Linie EF, ferner FD, welche ich verlängerte, bis sie die verlängerte EB träfe, und endlich AG.

L. Nun haben Sie zwey Sätze, so wohl für den Fall, wenn eine gerade Linie in zwey gleiche und zwey ungleiche Theile getheilt ist, als auch für den, wenn eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilt, und ihr darauf ein Stück in gleicher Richtung angesetzt ist. Die Anwendung dieser Sätze wird uns in der

Folge,

Folge, wie ich schon erwähnet habe, großen Vortheil stiften, und es kann nicht schaden, wenigstens einen Fall jetzt durchzunehmen, woben Sie dies deutlich sehen können. Betrachten Sie also die 37te Figur. BA ist darin in H in zwey Theile getheilt, BC ist = BAq und GA = HAq, AE = EC und EF = BE.

S. (Fällt ein) Dann ist AC in zwey gleiche Theile getheilt, und darauf das Stück AF in gleiche Richtung angesetzt.

L. Und es ist also?

S. FA × FC + AEq = EFq.

L. EF aber soll gleich seyn?

S. BE

L. Also können Sie auch anstatt EFq setzen.

S. BEq.

L. Und dann erhalten Sie?

S. FA × FC + AEq = BEq.

L. BEq ferner ist gleich?

S. BEq = BAq + AEq, denn BE ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreyecks BAE.

L. Darnach den vorhergehenden Satz abgeändert, so wird?

S. FA × FC + AEq = BAq + AEq

L. Was glauben Sie mit diesem Satze weiter für eine Veränderung vornehmen zu können?

S Ich kann AEq von beyden gleichen Größen wegnehmen, und dann wird

FA × FC = BAq.

L. Drücken Sie nun dieses nach der Figur aus.

S. Da ist also GC = BC.

L. Haben nicht GC und BC etwas mit einander gemein?

S. Ja das Rechteck HC.

L. Und wenn Sie nun dieses den Figuren GC und BC gemeine Stück von denselben ebenfalls abziehen?

S. S. erhalte ich GA = BK.

L. Wie nannten wir vorhin GA?

S. HAq.

L. Und was ist BK für ein Rechteck, wenn Sie dasselbe nach seinen Seiten beschreiben wollen?

S. BH × BA, denn BD = BA, weil BC = BAq.

L. Nun weiter nichts vorausgesetzt als die gerade linie BA und die beyden Theile derselben BH und HA, und so den Satz GA = BK oder HAq = BH × BA ausgedrückt?

S. Dann ist das Quadrat des einen Theils der gegebenen linie so groß als das Rechteck zwischen dem andern Theile und der ganzen linie.

L. Wie glauben Sie also es anfangen zu müssen, wenn Sie eine gegebene gerade linie

nie so in zwey Theile theilen sollten, daß das Quadrat des einen Theils dem Rechtecke zwischen dem andern Theile und der ganzen Linie gleich sey?

S. (Denkt eine Weile nach) Zuerst beschriebe ich über der gegebenen Linie, BA z. E. Fig. 37, ein Quadrat BC, theilte darauf die eine Seite desselben AC in zwey gleiche Theile, und zöge die Linie BE. Ferner verlängerte ich diese getheilte Linie so weit, bis ihre Hälfte mit der Verlängerung der Linie BE gleich wäre, beschriebe nun mit der Verlängerung über einem Theile der gegebenen Linie ein Quadrat, und verlängerte endlich die eine Seite desselben, bis sie die andere Seite des Quadrats der gegebenen Linie erreichte.

L. Um die gerade Linie BA auf die beschriebene Art getheilt zu haben, hätten Sie doch ohnstreitig nur nöthig, den Punkt H in derselben zu bemerken?

S. Ja, denn dies ist der erforderliche Theilungspunkt.

L. Brauchen Sie, um bloß deisen Punkt zu erhalten, alle die Linien, welche die 37te Figur enthält?

S. Nein, denn den erhielte ich schon, wenn ich AE $=$ $\frac{1}{2}$ BA unter einem rechten Winkel in A an BA setzte, darauf BE zöge, ferner EA verlängerte, bis EF gleich BE wäre, und endlich AH $=$ AF von der Linie AB abschnitte.

L. Theilen Sie doch einmal auf diese Art die Linie B A Fig. 38.

S. (Er thut es, und es entsteht die 39te Figur)

L. Wie wenig Linien diese Figur gegen die 37te enthält! Aber wären Sie an dieser Figur auch wohl im Stande, die Richtigkeit der vorgenommenen Theilung zu beweisen?

S. Nein, das könnte ich nicht.

L. Bemerken Sie daher hier den Unterschied unter dem, was nöthig ist, wenn man etwas nur thun soll, ohne die Richtigkeit seines Verfahrens zugleich zu beweisen, und unter dem, was nöthig ist, wenn dies letztere zugleich geschehen soll. Es ist ganz natürlich, daß man, wenn man zugleich beweisen soll, daß man recht gehandelt habe, mehr thun müsse, als wenn solches nicht erforderlich ist, indem man in jenem Falle zwey, in diesem aber nur eine Absicht hat. Wird in der Folge bloß von Ihnen verlangt, eine gerade Linie so zu theilen, daß das Quadrat des einen Theils, so groß sey, als das Rechteck zwischen dem andern Theile und der ganzen Linie, so können Sie den Weg einschlagen, der die 39te Figur enthält; sollen Sie aber auch beweisen, daß Sie richtig getheilt haben, so dürfen Sie Sichs nicht verdrießen lassen, die weitläuftige Zeichnung der 37ten Figur zu entwerfen. — Nun wiederholen Sie noch einmal kurz nach der 37ten Figur den Beweis des Satzes

$$HAq = BH \times BA.$$

S. Es ist, da $AE = EC = \frac{1}{2} BA$, und $EF = BE$, und $BAE = BAF = R$.

$FA \times FC + AEq = FAq$, und
$FAq = BEq$, weil $FA = BE$. Also ist
auch $FA \times FC + AEq = BEq$, und da
$BEq = BAq + AEq$
auch $FA \times FC + AEq = BAq + AEq$;
und AEq auf beyden Seiten weggelassen
$FA \times FC = BAq$.

Da nun ferner $FA \times FC$ und BAq das Rechteck HC gemein haben, so ist
$FA \times FC - HC = BAq - HC$
oder $GA = BK$
d. h. $HAq = BH \times BA$.

L. Nun Sie auch diesen Satz so gut gefaßt haben, wollen wir in unserer nächsten Unterredung die Betrachtung der rechtwinkligen Parallelogramme zu endigen suchen, und dann zu einer andern Art von Figuren fortgehen.

Fünftes Gespräch.

L. Die Figuren, welche wir bisher betrachtet haben, sind lauter rechtwinklige Parallelogramme gewesen, denn wir haben immer Rechtecke und Quadrate mit einander verglichen. Vorher untersuchten wir die Parallelogramme überhaupt, und der Gegenstand unserer

serer letztern Unterredungen ist also von dem vorhergehenden nur darin verschieden, daß er eine besondere Art des vorher betrachteten allgemeinen Gegenstandes ist. Bey der Betrachtung der Parallelogramme überhaupt kamen wir gelegentlich auf die Dreyecke, sollten wir nicht auch jetzt bey der Betrachtung der rechtwinkligen Parallelogramme etwas neues von den Dreyecken lernen können?

S. Ich glaube es, denn bey den Parallelogrammen überhaupt habe ich von den Dreyecken manches gelernt, was ich vorher nicht wußte; und da ich nun die rechtwinkligen Parallelogramme genauer kennen gelernt habe, so kann mir das vielleicht helfen, um in der Kenntniß der Dreyecke noch weiter zu kommen. Aber nun wie?

L. Haben wir nicht schon einmal rechtwinklige Parallelogramme und Dreyecke zusammen betrachtet?

S. Ja bey dem pythagorischen Lehrsatze.

L. Wie geschahe dies damals? Verglichen wir da ein Dreyeck mit rechtwinkligen Parallelogrammen, oder verglichen wir nur rechtwinklige Parallelogramme, die sich bey einem Dreyecke gedenken ließen, unter einander?

S. Wir verglichen rechtwinklige Parallelogramme, die sich bey dem Dreyecke gedenken ließen, unter einander, das Quadrat nemlich der Hypothenuse eines rechtwinkligen

Drey-

Dreyecks mit den beyden Quadraten der Catheten.

L. Bey was für einem Dreyecke haben wir also schon von rechtwinkligen Parallelogrammen gesprochen?

S. Bey dem rechtwinkligen Dreyecke.

L. Und bey was für Dreyecken werden wir also nun, wenn wir nicht bloß wiederholen, sondern weiter gehen wollen, die rechtwinklichen Parallelogramme zu betrachten haben?

S. Bey den stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreyecken.

L. Betrachten Sie einmal die Dreyecke ABC, Fig. 40. 41. und 42. In allen dreyen ist AB = AB und BC = BC, der Winkel ABC aber ist Fig. 40. ein rechter, Fig. 41. ein stumpfer und Fig. 42. ein spitzer Winkel. Wie ist nun in jedem dieser Dreyecke die Seite AC beschaffen?

S. In Fig. 41. ist die Seite AC größer, in Fig. 42. aber kleiner als Fig. 40, weil in Dreyecken, in welchen zwey Seiten gleich, die von denselben eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, die dritten Seiten sich in Ansehung der Größe nach den gedachten eingeschlossenen Winkeln richten.

L. Die vorgebrachte Behauptung mit Worten vorgetragen, so ist also, wenn in einem rechtwinkligen, stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreyecke zwey Seiten gleich sind,

die dritte Seite in dem stumpfwinkligen Dreyecke gröſſer, die aber in dem spitzwinkligen Dreyecke kleiner, als die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreyecks?

S. Ja.

L. Folglich wird das Quadrat der Seite eines stumpfwinkligen Dreyecks, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, gegen die beyden Quadrate der übrigen Seiten gehalten, wie beschaffen seyn?

S. Gröſſer als diese beyden Quadrate.

L. Das Quadrat einer Seite eines spitzwinkligen Dreyecks aber gegen die beyden Quadrate der übrigen Seiten?

S. Kleiner als dieselben.

L. Das ist so weit richtig; allein nun frägt sich erstlich, um wie viel ist bey einem stumpfwinkligen Dreyecke das Quadrat der gröſten Seite gröſser, als die beyden Quadrate der übrigen Seiten? und zweytens, um wie viel ist bey einem spitzwinkligen Dreyecke das Quadrat der einen Seite kleiner, als die beyden Quadrate der übrigen Seiten? Ohne diese Fragen beantwortet zu haben, ist unsere Kenntniß zu unvollständig. Wir wollen also zuvörderst das stumpfwinklige Dreyeck A B C Fig. 41 betrachten. Wir müssen, um zu unserm Zwecke zu gelangen, rechtwinklige Dreyecke zu Hülfe nehmen, denn dabey sind wir im Stande, die Quadrate der Seiten zu vergleichen. Ich will also C B verlängern und aus A

auf

auf die verlängerte CB eine senkrechte Linie ziehen. Hier (Fig. 43) ist es geschehen.

S. Wenn ADB = R, so ist

ADq = ABq — DBq, so wie

auch ADq = ACq — DCq, und folglich

ABq — DBq = ACq — DCq.

L. DC ist in B in zwey ungleiche Theile getheilt.

S. Also ist DCq = DBq + BCq + 2DB × BC. Da nun

ABq — DBq = ACq — DCq

und DCq = DBq + BCq + 2DB × BC, so ist ABq — DBq = ACq — DBq — BCq — 2DB × BC

und wenn DBq auf beyden Seiten weggelassen wird,

ABq = ACq — BCq — 2DB × BC.

L. Von ACq müssen Sie also BCq und 2DB × BC wegnehmen, wenn Sie ABq erhalten wollen; und was müssen Sie daher zu ABq zusetzen, wenn Sie ACq daraus hervorbringen wollen?

S. Eben das, was ich von ACq wegnehmen muß, um ABq zu erhalten, nemlich BCq und 2DB × BC.

L. Also wird ABq + BCq + 2DB × BC?

S. ABq + BCq + 2DB × BC = ACq.

L. Also übertrifft ACq die beyden Quadrate ABq und BCq?

S. Um das doppelte Rechteck zwischen BD und BC?

L. Dies ist ein Rechteck zwischen einer den stumpfen Winkel einschliessenden Seite, und der ihr in gleicher Richtung bis zu der aus dem Gegenwinkel auf sie herabgefällten Perpendiculären angesetzten linie. Beschreiben Sie nun alles mit Worten.

S. In einem stumpfwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, größer als die beyden Quadrate der übrigen Seiten, und zwar um das zwiefache Rechteck zwischen der einen von den den stumpfen Winkel einschliessenden Seiten und dem ihr in gleicher Richtung bis zu der aus dem Gegenwinkel auf sie herabgefälliten Perpendiculären angesetzten Stücke.

L. Nun zu der andern Untersuchung, nemlich, um wie viel in einem spitzwinkligen Dreyecke das Quadrat der einen Seite kleiner sey, als die beyden Quadrate der übrigen Seiten.

S. Sagen Sie mir nichts, ich hoffe, da ich weiß, wie man sich bey dem vorhergehenden Satze zu nehmen hat, hier schon ohne Hülfe fertig zu werden. — In der 42ten Figur ist also das Quadrat von AC kleiner als die beyden Quadrate der Seiten AB und BC, und es soll bestimmt werden, um wie viel. Da ich hier Quadrate mit einander vergleichen soll, so suche ich rechtwinklige Dreyecke zu erhalten, um den pythagorischen Lehrsatz anwenden zu können, und es geschieht solches, wenn ich aus A eine senkrechte Linie nach BC ziehe.

Das

Das ist nun in der 44ten Figur geschehen, und es ist also

$$AD^q = AB^q - BD^q,$$ so wie

auch $AD^q = AC^q - DC^q$. Folglich

ist $AB^q - BD^q = AC^q - DC^q$.——

L. Will es nicht weiter fort?

S. Ich dachte, ohne Anstoß mit der angeführten Bestimmung fertig zu werden, und nun sehe ich gar nicht, wie ich fortfahren soll, und bin doch noch nicht zu Ende, denn ich habe das Quadrat von BC noch gar nicht in dem herausgebrachten Satze.

L. Wie groß ist denn das Quadrat der ganzen Linie, wenn dieselbe, so wie Fig. 44 in zwey ungleiche Theile getheilt ist?

S. So groß als die beyden Quadrate der ungleichen Theile, nebst dem doppelten Rechtecke zwischen diesen ungleichen Theilen.

L. Und das Quadrat des einen Theils würde demnach seyn?

S. So groß als das Quadrat der ganzen Linie weniger dem Quadrate des andern Theils und dem doppelten Rechtecke zwischen den beyden Theilen.

L. Wenn Sie diesen Satz anwenden wollten, so könnten Sie Ihre vorhergehende Behauptung leicht so abändern, daß darin auch das Quadrat von BC vorkäme. Denn da darnach

$$DC^q = BC^q - BD^q - 2BD \times DC;$$

so wäre

$AB^q - BD^q = AC^q - BC^q + BD^q + 2BD \times DC$. Allein diese Bestimmung wäre einmal an und für sich selbst nicht deutlich genug, und überdem sind Sie mit der Art der Veränderung, die bey der Herleitung der letztern Folge statt findet noch nicht bekannt.

S. Also werde ich auch wohl nicht bestimmen können, um wie viel bey einem spitzwinkligen Dreyecke das Quadrat der einen Seite kleiner ist, als die beyden Quadrate der übrigen Seiten.

L. Ist Ihnen ausser dem angeführten kein Satz weiter bekannt, der eine gerade Linie betrifft, die in zwey ungleiche Theile getheilt ist?

S. O ja, der nem ich, daß alsdann die Quadrate der ungleichen Stücke dem doppelten Quadrate der Hälfte nebst dem doppelten Quadrate des Stücks, so zwischen den Theilungspunkten liegt, gleich ist; allein dieser Satz hilft mir noch weniger, als der vorhergehende.

L. Sollte sich denn etwa bey einer in zwey ungleiche Theile getheilten Linie noch ein Satz behaupten lassen, den wir noch nicht gehabt hätten. — Lassen Sie uns die 13te Figur noch einmal betrachten. Sind darin, um jetzt nur von den Rechtecken zu reden, weiter keine Rechtecke, als AI und ID? Was ist AG?

S.

S. AG ist ein Rechteck zwischen der ganzen Linie und dem einen Theile.

L. Enthält die 13te Figur dies Rechteck auch zweymal, so wie darin das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen zweymal enthalten ist?

S. Wenn man CG zweymal nimmt, so ist auch das Rechteck zwischen der ganzen Linie und dem einen Theile zweymal darin, denn AG ist gleich CD.

L. Das Quadrat des einen Theils AC und das doppelte Rechteck zwischen der ganzen Linie AB und dem andern Theile CB nun zusammen genommen, sind diese bloß dem Quadrate der ganzen Linie AB gleich?

S. Nein, sondern dem Quadrate der ganzen Linie und dem Quadrate des andern Theils.

L. Also hätten wir hier doch noch einen bisher noch nicht untersuchten Satz. Können Sie ihn wohl vollständig wiederholen?

S. Wenn man eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie nebst dem Quadrate des einen Theils gleich dem Quadrate des andern Theils, und dem doppelten Rechtecke zwischen dem ersten Theile und der ganzen Linie.

L. Und das Quadrat des einen Theils allein genommen?

S. So groß als das Quadrat der ganzen Linie nebst dem Quadrate des andern

Theils

Theils weniger dem doppelten Rechtecke zwischen der ganzen Linie und dem andern Theile.

L. Also ist DCq Fig. 44?

S. DCq = BCq + BDq — 2BC × BD.

L. Vorhin bewiesen Sie, daß Fig. 44 ABq — BDq = ACq — DCq sey. Demnach übertrifft ACq das vorhergehende ABq — BDq um wie viel?

S. Um DCq.

L. Und also ist doch ABq — BDq + DCq = ACq?

S. Ja.

L. Anstatt DCq aber können Sie setzen?

S. BCq + BDq — 2BC × BD.

L. Und dann wird?

S. ABq — BDq + BCq + BDq — 2BC × BD = ACq.

L. In der ersten Hälfte dieses Satzes steht — BDq und + BDq Erst soll man also BDq fehlen lassen, und dann dasselbe hinzusetzen, also ist es so gut, als wäre BDq gar nicht darin, und folglich ist?

S. ABq + BCq — 2BC × BD = ACq.

L. Nun versuchen Sie dies durch Worte auszudrücken.

S. In einem spitzwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der einen Seite kleiner als die beyden Quadrate der übrigen Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck zwischen der

einen

einen dieser übrigen Seiten und dem Stücke derselben, welches zwischen der andern der beyden übrigen Seiten und der aus der Spitze des der getheilten Seite gegenüber stehenden Winkels gezogenen senkrechten Linie liegt.

L. Also läßt sich nunmehr doch der Unterschied zwischen dem Quadrate der einen Seite in einem spitzwinkligen Dreyecke und den beyden Quadraten der übrigen Seiten bestimmen. — So wie es Ihnen, als Sie diese Bestimmung suchten, gieng, indem sie das, was sie suchten, nicht finden konnten, weil es Ihnen an einem Hülfssatze fehlte, so wird es Ihnen oft gehen, wenn Sie erst ganz allein Untersuchungen anstellen, und dabey nicht Schritt vor Schritt von einem Satze zum andern gehen. Merken Sie Sich daher, daß man in einem solchen Falle nicht sogleich bey entstehenden Schwierigkeiten die Hoffnung, sein Ziel zu erreichen, aufgeben, sondern vielmehr dann nach den fehlenden Hülfssätzen sich umsehen müssen. — Hiermit können wir denn die Vergleichung der rechtwinkligen Parallelogramme unter einander beschließen. Doch wird es nützlich seyn, daß wir uns nun noch die dabey durchgenommenen Sätze kurz wiederholen. Wir haben bey dieser Vergleichung eine gegebene gerade Linie in zwey und in drey Theile, die einander bald gleich bald ungleich waren, getheilt, und die Rechtecke, die dann möglich waren, untersucht, und sind darauf

zur

zur Vergleichung der Quadrate der Seiten in einem stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreyecke fortgegangen. Was für Sätze haben wir also erstlich bey einer geraden Linien gehabt, die in zwey ungleiche Theile getheilt war?

S. Folgende:

1. Wenn eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile getheilt ist, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß, als die beyden Rechtecke zwischen der ganzen Linie und den gedachten ungleichen Theilen.

2. Wenn eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile getheilt ist, so ist das Quadrat der ganzen Linie so groß, als die beyden Quadrate der Theile nebst dem doppelten Rechtecke zwischen diesen Theilen.

3. Wenn eine gerade Linie in zwey ungleiche Theile getheilt ist, so ist das Quadrat der ganzen Linie nebst dem Quadrate des einen Theils so groß, als das doppelte Rechteck zwischen diesem Theile und der ganzen Linie nebst dem Quadrate des andern Theils.

L. Haben wir nicht aber auch eine gerade Linie auf eine bestimmte Art in zwey ungleiche Theile theilen gelernt?

S. Ja, so nemlich, daß das Quadrat des einen Theils so groß war, als das Rechteck zwischen dem andern Theile und der ganzen Linie.

L. Was für Sätze haben wir ferner bey einer geraden Linie gehabt, die in drey ungleiche

che Theile getheilt war? Ich will mich näher erklären. Bey den Linien, welche wir in drey Theile theilten, waren entweder alle drey Theile einander ungleich, oder es waren darunter zwey einander gleich, oder es waren alle drey gleich. Den letzten Fall jetzt noch nicht zu berühren, so waren zwey Theile gleich, so wohl, wenn eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile getheilt wurde, als auch, wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilte, und ihr dann in gleicher Richtung noch ein Stück ansetzte. Jetzt frage ich nun nach den Sätzen für den Fall, wenn alle drey Theile der gegebenen Linie ungleich sind.

S. Da haben wir nur den einen Satz gehabt, daß das Quadrat der ganzen Linie so groß ist, als die drey Rechtecke zwischen der ganzen Linie und den gedachten drey Theilen.

L. Wenn aber eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile getheilt ist?

S. Dann ist:

1. das Rechteck zwischen den beyden ungleichen Theilen nebst dem Quadrate des Stücks so zwischen den Theilungspuncten liegt, so groß als das Quadrat der Hälfte.

2. Sind die beyden Quadrate der ungleichen Theile zusammen genommen so groß, als das doppelte Quadrat der Hälfte nebst dem doppelten Quadrate des Stücks zwischen den Theilungspunkten.

L. Und wenn eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilt, und ihr darauf in gleicher Richtung ein Stück zugesetzt ist?

S. Dann ist:

1. das Rechteck zwischen dem angesetzten Stücke und der aus der ganzen und diesem Stücke bestehenden Linie nebst dem Quadrate der Hälfte so groß als das Quadrat der Linie, welche der Hälfte und dem angesetzten Stücke zusammen genommen gleich ist.

2. Das Quadrat der aus der ganzen und dem angesetzten Stücke bestehenden Linie nebst dem Quadrate dieses angesetzten Stücks so groß als das doppelte Quadrat der Hälfte nebst dem doppelten Quadrate der aus der Hälfte und dem angesetzten Stücke bestehenden Linie.

L. Was für Sätze sind ferner bey der Theilung einer gegebenen geraden Linie in lauter gleiche Theile da gewesen?

S. Folgende:

1. Wenn man eine gerade Linie in zwey gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie viermal so groß als das Quadrat der Hälfte.

2. Wenn man eine gerade Linie in drey gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie viermal so groß als das Quadrat des dritten Theils, und

3. Wenn man eine gerade Linie in 4, 5 u. s. w. gleiche Theile theilt, so ist das Quadrat

drat der ganzen Linie, 16, 25 u. s. w. Male so groß als das Quadrat eines Theils.

L. Was scheint Ihnen nun noch übrig?

S. Die beyden Sätze von den stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreyecken.

1. In einem stumpfwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüber steht, größer als die beyden Quadrate der übrigen Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck zwischen der einen den stumpfen Winkel einschliessenden Seite und dem ihr in gleicher Richtung von dem stumpfen Winkel an bis zu der aus dem Gegenwinkel gezogenen Perpendiculären angesetzten Stücke.

2. In einem spitzwinkligen Dreyecke ist das Quadrat einer Seite kleiner als die beyden Quadrate der übrigen Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck zwischen der einen dieser übrigen Seiten und dem Stücke derselben, welches zwischen der andern der beyden übrigen Seiten und der aus der Spitze des der getheilten Seite gegenüber liegenden Winkels gezogenen senkrechten Linie liegt.

L. Ich habe Ihnen bey dieser Wiederholung nicht geholfen; vielleicht ist ein oder der andere Satz ausgelassen, vielleicht sind Sie auch nach dem heute erhaltenen Winke im Stande, hie und da zu den durchgenommenen noch einen neuen Satz hinzuzusetzen. Ueberlegen Sie und versuchen Sie. Zugleich aber bringen Sie das nächste Mal die Antworten

auf die vor einiger Zeit Ihnen gegebenen Fragen mit. Wenn wir uns darüber werden unterredet haben, so sollen Sie dann anfangen, den Kreis zu untersuchen.

Sechstes Gespräch.

L. Ich will jetzt mit der Beurtheilung der Antworten auf die vor einiger Zeit Ihnen mitgegebenen Fragen den Anfang machen. Sie haben dieselben doch aufgesetzt und mitgebracht?

S. So weit ich damit habe zu Stande kommen können sind sie hier. (Der Schüler überreicht bey diesen Worten dem Lehrer folgendes:)

1. Wenn sind zwey gerade Linien parallel?

a. Wenn dabey, indem sie von einer dritten geschnitten werden, zwey Wechselwinkel gleich sind.

b. Wenn dabey, indem sie von einer dritten geschnitten werden, ein äusserer Winkel dem innern gegenüber stehenden gleich ist.

c. Wenn dabey, indem sie von einer dritten geschnitten werden, zwey innere gegenüber stehende Winkel zweyen rechten Winkeln gleich sind.

d. Wenn beyde einer dritten parallel sind.

e. Wenn man dazwischen zwey Dreyecke legen kann, die einerley oder gleiche Grundlinien haben, und einander gleich sind.

2. Wenn sind zwey Winkel zusammen genommen so groß als ein dritter?

a. Wenn jene innere gegenüber stehende und dieser ein äusserer Winkel eines Dreyecks sind, in welchem eine Seite verlängert worden.

b. Wenn jene die beyden spitzen und dieser der rechte Winkel eines rechtwinkligen Dreyecks sind.

3. Wenn sind zwey Winkel zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel?

a. Wenn sie zwey Nebenwinkel sind.

b. Wenn sie zwey innere gegenüber stehende Winkel bey zwey Parallellinien sind, die von einer dritten geschnitten werden.

c. Wenn sie in einem Parallelogramme an Einer Seite liegen.

4. Wenn ist ein Dreyeck die Hälfte von einem Parallelogramme?

a. Wenn es mit denselben einerley oder gleiche Grundlinie hat, und beyde zwischen einerley Parallelen liegen.

b. Wenn es eines von den beyden Dreyecken ist, in welche ein Parallelogramm durch die Diagonale getheilt wird.

5. Wenn ist ein Dreyeck einem Parallelogramme gleich?

Wenn beyde zwischen einerley Parallelen liegen, und die Grundlinie des Dreyecks doppelt so groß ist, als die Grundlinie des Parallelogramms.

6. Wenn ist ein Quadrat zweyen andern Quadraten gleich?

Wenn jenes die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, diese aber seine Catheten zu ihren Seiten haben.

7. Wenn ist ein Quadrat zweymal so groß als ein anderes?

Wenn jenes die Hypothenuse eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreyecks zur Seite hat, dessen Schenkel der Seite des andern Quadrats gleich sind; oder, wenn die Seite des erstern der Diagonale des andern gleich ist.

L. Mit diesen Antworten bin ich recht wohl zu frieden; allein wie steht es mit der 8ten und 9ten Frage? Haben Sie die Antwort darauf noch nicht finden können?

S. Ich weiß wohl, wie man die Seite eines Quadrats findet, welches einem Rechtecke

ecke oder einem Parallelogramme überhaupt gleich ist, allein beschreiben kann ich sie nicht, oder ich würde sehr weitläuftig seyn müssen.

L. Anders ist es Ihnen bis jetzt auch noch nicht möglich. Aber was meinen Sie zu folgender Beschreibung?

Ein Quadrat ist einem Rechtecke gleich, wenn seine Seite die mitlere Proportionallinie zwischen den Seiten des Rechtecks ist; und einem Parallelogramme überhaupt, wenn seine Seite die mitlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und Höhe des Parallelogramms ist.

S. Diese Beschreibung verstehe ich noch nicht. Was ist denn die mitlere Proportionallinie für eine Linie? und was versteht man unter der Höhe eines Parallelogramms?

L. Ich kann Ihnen dies jetzt noch nicht erklären; aber setzen Sie einmal die Richtigkeit meiner Beschreibung voraus, und sagen Sie mir, ob sie Ihnen kurz genug scheinen?

S. Kurz genug ist sie allerdings.

L. Verstehen werden Sie dieselbe mit der Zeit auch schon lernen, und bis dahin, daß sich dazu Gelegenheit findet, müssen Sie also die Beantwortung der gedachten 8ten und 9ten Frage verschieben. Vielleicht wird bis dahin eine geraume Zeit verfliessen, und Sie am Ende Sich wundern, daß Sie noch so viel erst haben lernen müssen, ehe Sie eine Sache, die Sie längst ganz begriffen zu haben glaub-

ten, kurz und deutlich mit Worten beschreiben konnten. — Doch jetzt weiter. — Haben Sie etwa noch einen neuen Satz zur Vergleichung der rechtwinkligen Parallelogramme unter einander gefunden?

S. Nein, mich dünkt, daß wir keinen ausgelassen haben.

L. Hier habe ich Ihnen ein Buch (Euklids Elemente) mitgebracht, in welchem alle die Sätze stehen, welche wir bis jetzt gehabt haben. Nachdem Sie so weit als es geschehen die Dreyecke und Parallelogramme durch Unterredungen mit mir kennen gelernt haben, so können Sie nun nach gerade auch anfangen, mathematische Schriften für Sich zu lesen. Fangen Sie indeß nicht von vorne an, sondern lesen Sie für das erste bloß das 2te Buch, und wenn Sie ganz damit zu Stande gekommen sind, so sagen Sie mir, was Ihnen bey der Durchlesung desselben beygefallen ist. Zeit lasse ich Ihnen dazu so viel Sie gebrauchen werden. Ueberlegen Sie alles sorgfältig, und wenn das geschehen, so sollen Sie künftig nicht nur in diesem Buche mehreres, sondern auch noch andere mathematische Schriften lesen, und hinterher werde ich mich immer mit Ihnen über das gelesene unterreden. — Nun zur Betrachtung des Kreises. — Was verstehen Sie unter einem Kreise?

S. Unter einem Kreise verstehe ich eine krummlinige Figur, deren Umkreis von ihrem

Mit=

Mittelpuncte allenthalben gleich weit entfernt ist.

L. Sind Ihnen nicht auch schon einige Linien in dem Kreise bekannt?

S. Ja, die Halbmesser.

L. Was verstehen Sie unter einem Halbmesser?

S. Eine gerade Linie in einem Kreise zwischen dem Mittelpunkte und dem Umkreise desselben.

L. Und wie sind alle Halbmesser eines Kreises beschaffen?

S. Sie sind alle einander gleich.

L. Betrachten Sie nun diese (die 45te) Figur. Nicht wahr da giebt es noch viele Linien, welche Sie noch nicht kennen?

S. BC, AC und DC sind mir bekannt, es sind Halbmesser; allein von den übrigen weiß ich weiter nichts, als daß es gerade Linien sind.

L. Ich will Ihnen ihre Namen sagen, und Sie sollen versuchen, Sich dieselben zu erklären. BD also heißt ein Durchmesser, EF und DG Sehnen, das Stück von dem Umkreise EF oder DG, Bogen, und HI eine Tangente, und diese letzte Linie kann verlängert oder verkürzt werden, ohne ihre Natur und Namen zu verändern. Wie glauben Sie also einen Durchmesser beschreiben zu müssen?

S. Ein Durchmesser eines Kreises ist eine gerade Linie in demselben, welche von ei-

nem Punkte des Umkreises durch den Mittelpunkt bis zu einem andern Punkt im Umkreise gezogen ist.

L. Aus wie vielen Halbmessern besteht also jeder Durchmesser?

S. Aus zweyen, BD z. B. besteht aus den Halbmessern BC und CD.

L. Wie werden also, da alle Halbmesser eines Kreises gleich sind, alle Durchmesser desselben seyn?

S. Auch alle einander gleich.

L. Was ist nun aber eine Sehne? betrachten Sie die Linien EF und DG.

S. Eine Sehne ist eine gerade Linie in einem Kreise zwischen zweyen Punkten des Umkreises desselben, welche aber nicht durch den Mittelpunkt geht.

L. Worin unterscheiden sich also die Durchmesser von den Sehnen?

S. Dadurch, daß die Durchmesser durch den Mittelpunkt gezogen sind, die Sehnen aber nicht.

L. Sind auch alle Sehnen eines Kreises einander gleich?

S. Nein, die Sehnen können nicht alle gleich seyn.

L. Was ist ferner ein Bogen? Betrachten Sie die krummen Linien EF und DG.

S. Ein Bogen ist ein Theil eines Umkreises.

L. Und endlich eine Tangente?

S. Eine Tangente ist eine unbegränzte gerade Linie ausserhalb des Kreises.

L. Aber doch nicht ganz ausser aller Verbindung mit dem Kreise?

S. Nein, sondern sie liegt an dem Umkreise.

L. Genauer es zu bestimmen, so ist eine Tangente eine gerade Linie, welche einen Kreis in nicht mehr als einem Punkte berührt. — Dies sind nun die Linien, welche die 45te Figur enthält. Allein nun giebt es auch Winkel, welche unsere Untersuchung nöthig machen werden, und dann Figuren. Suchen Sie zuerst die Winkel auf.

S. Ich sehe dreye, nemlich den Winkel BCA, den Winkel BDG und den Winkel HBD.

L. Es giebt hier auch noch ein Paar Winkel von einer Ihnen noch ganz unbekannten Art, den Winkel HBE nemlich und den Winkel EBD. Beyde Winkel haben einen geradlinigen Schenkel, HB nemlich und BD, und einen krummlinigen EB.

S. Das sind also vermischtlinige Winkel?

L. Ganz recht. Allein was ist nun BCA für ein Winkel? Beschreiben Sie denselben nach dem Orte, wo seine Spitze liegt.

S. Es ist ein Winkel am Mittelpunkte.

L. Und seine Schenkel sind daher, was für Linien?

S. Halbmesser.

L. Was ist auf eine ähnliche Art beschrieben BDG für ein Winkel?

S. Ein Winkel am Umkreise.

L. Und dessen Schenkel sind?

S. Eine Sehne und ein Durchmesser.

L. Könnten es nicht auch zwey Sehnen seyn?

S. O ja, warum nicht?

L. Sie können also auch, zwey Sehnen, sagen, zumal da man, wie ich hier solches berühren will, den Durchmesser auch oft eine Sehne nennt. — Was ist nun aber EBD für ein Winkel?

S. Ein vermischtliniger Winkel eines Bogens und eines Durchmessers oder Sehne.

L. Und HBE?

S. Ein vermischtliniger Winkel einer Tangente und eines Bogens.

L. Endlich HBD?

S. Ein Winkel einer Tangente und einer Sehne.

L. Nun zu den Figuren, welche die 45te Figur enthält. Was sehen Sie für welche?

S. Ausser dem ganzen Kreise lauter vermischtlinige Figuren, BAGDB nemlich, das Stück des Kreises über EF, und die Figur BCA. Es sind zwar noch mehrere Figuren darin, aber diese sind von den genannten nicht verschieden.

L. Die erste Figur, BAGDB nemlich, nennt man einen halben Kreis. Daß es gerade die Hälfte des Kreises sey, werden Sie nachher lernen. Jetzt die Frage: Zwischen was für Linien ist der halbe Kreis eingeschlossen?

S. Zwischen einen Durchmesser und seinen Bogen.

L. Das Stück des Kreises über EF wird ein Abschnitt und BCA ein Ausschnitt genannt. Sind Sie wohl im Stande, beyde Figuren genauer zu beschreiben?

S. Ein Abschnitt ist ein Stück eines Kreises, so zwischen einer Sehne und ihrem Bogen liegt; ein Ausschnitt aber ein Stück eines Kreises zwischen zwey Halbmessern und den eingeschlossenen Bogen. — Die Namen Abschnitt und Ausschnitt sind sehr gut, denn man kann sie sich leicht merken. Hätte man einen Kreis von Papier oder Pappe, und wollte einen Abschnitt davon haben, so müßte man ein Stück abschneiden, wollte man aber einen Ausschnitt machen, so müßte man ausschneiden.

L. Sie können durch diese Aehnlichkeit Sich immer das Behalten dieser Benennungen erleichtern, denn bedeutend sind diese Namen allerdings. Doch wir wollen nunmehr die vorgebrachten Erklärungen voraussetzen, und zu eigentlichen Untersuchungen fortgehen. Was gleich und was ungleich ist, und im letzten Falle, in wiefern Ungleichheit statt findet, ist

bisher,

bisher, d. h. bey den Dreyecken und Parallelogrammen, immer der Gegenstand unserer Untersuchung gewesen. Auch jetzt werden wir dieselben Fragen bey dem Kreise und allen dabey sich befindenden Stücken zu untersuchen haben. Dieser Wink leite Sie in der Folge, denn Sie müssen nun immer mehr die durchzunehmenden Sätze selbst finden, und zwar auch in der gehörigen Ordnung, und es wird Ihnen leicht werden, wenn Sie nur immer Sich an den Weg zurück erinnern werden, den Sie nun schon verschiedene Male gegangen sind. Zuerst die Frage: Was muß Ihnen von einem Kreise gegeben seyn, wenn Sie Sich denselben ganz bestimmt sollen denken können, oder wenn Sie dadurch in den Stand gesetzt seyn sollen, nicht mehr als einen Kreis Sich zu gedenken?

S. Der Mittelpunkt und der Halbmesser; durch den Halbmesser wird der Kreis der Größe, und durch den Mittelpunkt dem Orte nach bestimmt.

L. Wenn sind also zwey Kreise einander gleich?

S. Wenn sie gleiche Halbmesser haben.

L. Nicht auch, wenn ihre Durchmesser gleich sind?

S. Dann auch, denn wenn in zwey Kreisen die Durchmesser gleich sind, so sind es auch die Halbmesser, und wenn die Halbmesser gleich sind, so sind es die Durchmesser ebenfalls, weil die Durchmesser das Zweyfa-

che von den Halbmessern, und die Halbmesser die Hälften von den Durchmessern sind.

L. Diesen Satz wollen wir uns hier als einen Grundsatz merken, und in der Folge auch so gebrauchen. Wenn wir also über die Gleichheit oder Ungleichheit zweyer Kreise urtheilen wollen, so haben wir nur auf ihre Durchmesser oder Halbmesser zu sehen. Fig. 45 ist ein Kreis, ziehen Sie darin einen Durchmesser oder Halbmesser.

S. Welches ist denn der Mittelpunkt darin? denn ehe ich den nicht weiß, kann ich keinen Durchmesser oder Halbmesser ziehen.

L. Und gleichwohl ist derselbe nicht immer gegeben, sondern man muß ihn suchen. Doch ehe wir solches thun, ein paar Worte von einer andern Sache. — Ich sagte vorhin, daß Sie nunmehr schon im Stande seyn müßten, die durchzunehmenden Sätze selbst aufzusuchen, und so gar die Ordnung derselben zu bestimmen, und das Hülfsmittel, welches ich dazu vorschlug, war die Zurückerinnerung an den Weg, welcher bey der Untersuchung der Dreyecke und der Parallelogramme eingeschlagen worden. Habe ich also wohl die Betrachtung des Kreises mit Recht von dem Satze angefangen, daß zwey Kreise gleich sind, wenn sie gleiche Halbmesser oder Durchmesser haben?

S. Ja, denn so wie wir bey den Dreyecken zuvörderst uns Kennzeichen von der

Gleichheit der ganzen Dreyecke merkten, und darauf erst zu der Untersuchung der Gleichheit und Ungleichheit ihrer Seiten und Winkel fortgiengen; so müssen wir ohnstreitig bey dem Kreise auch Kennzeichen von der Gleichheit ganzer Kreise haben, ehe wir die bey denselben zu betrachtende Dinge untersuchen können.

L. Und da man die Gleichheit zweyer Kreise aus der Gleichheit ihrer Halbmesser oder Durchmesser schließt, und man die Halbmesser und Durchmesser eines Kreises, ohne den Mittelpunkt desselben zu wissen, nicht kennen kann, so ist, da der Mittelpunkt desselben nicht immer gegeben ist, auch das nächste?

S. Daß man ihn zu finden wisse.

L. Gesetzt nun, daß man dieses gelernt habe, ist alsdann noch mehreres zur Vergleichung ganzer Kreise übrig?

S. Vielleicht giebt es ausser den berührten noch mehrere Kennzeichen für die Gleichheit ganzer Kreise, so wie wir auch bey den Dreyecken mehrere Sätze zur Bestimmung ihrer Gleichheit gehabt haben. Wenn das wäre, so müßten wir diese ebenfalls aufsuchen.

L. Sogleich? oder könnten wir nicht zuvor so weit als möglich die Linien und Winkel und Abschnitte und Ausschnitte des Kreises betrachten, und diese übrigen Kennzeichen der Gleichheit ganzer Kreise gelegentlich untersuchen und uns merken? Wie haben wir es bey den Dreyecken gemacht?

S.

S. Bey den Dreyecken haben wir nach jedem Kennzeichen der Gleichheit zweyer Dreyecke so weit als möglich die Gleichheit und Ungleichheit ihrer Seiten und Winkel untersucht.

L. Und das deswegen, weil wir, ohne diese letztere Untersuchung sogleich nach jedem Kennzeichen der Gleichheit zweyer Dreyecke anzustellen, die folgenden Kennzeichen nicht eingesehen hätten. Nur ein Beyspiel anzuführen, so kann der Satz: Wenn in zwey Dreyecken alle Seiten einzeln genommen einander gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke gleich, nicht eher eingesehen werden, als bis man die gleichschenkligen Dreyecke betrachtet hat, und dabey untersucht man nur Seiten und Winkel. Sobald wir daher den Mittelpunkt eines Kreises werden finden können, so werden wir auch gleich uns mit der Betrachtung der übrigen Dinge bey einem Kreise zu beschäftigen haben. So viel hievon für jetzt. — Wie findet man nun den Mittelpunkt eines Kreises?

S. (Nachdem er eine Zeitlang die 46te Figur betrachtet hat.) Der Mittelpunkt ist von dem Umkreise allenthalben gleich weit entfernt. Ich will also fürs erste zwey Punkte im Umkreise nehmen, A und B nemlich Fig. 47, und in dem Kreise einen Punkt suchen, der von beyden gleich weit entfernt ist. Das geschieht, wenn ich die Linie A B ziehe, und darüber ein gleichschenkliges Dreyeck beschreibe, welches innerhalb des Kreises fällt. — Hier (Fig. 48)

habe

habe ich es gethan. Aber der Punkt D, den ich auf diese Art erhalte, braucht der Mittelpunkt des Kreises noch nicht zu seyn; denn wenn ich zu dem gleichschenkligen Dreyecke über A B andere Schenkel nehme, so erhalte ich statt D einen andern Punkt. In dieser Figur z. B. (Der Schüler beschreibt jetzt die 49te Figur) ist nicht nur D, sondern E von A und B gleich weit entfernt.

L. Wie wäre es, wenn Sie einmal durch D und E eine gerade Linie zögen, und dieselbe auf beyden Seiten bis nach dem Umkreise verlängerten? Der Mathematiker soll ja zwischen jeden zwey gegebenen Punkten sich gerade Linien gedenken, und dieselbe auch, wo es nützlich scheint, verlängern.

S. Das will ich wohl thun. Hier (Fig. 50) habe ich es gethan.

L. Ueberlegen Sie nun, wie die Linie D E gezogen sey?

S. (Nach einigem Nachdenken) Sie ist so gezogen, daß der Winkel A D B, so wie auch der Winkel A E B in zwey gleiche Theile getheilt worden ist, auch steht sie auf A B senkrecht, und A B ist durch sie in zwey gleiche Theile getheilt.

L. Gesetzt, daß Sie nun in G H ausser D und E noch andere Punkte annähmen, und von denselben nach A und B gerade Linien zögen, würden dieselben auch gleich seyn?

S. Ja,

S. Ja, denn sie wären immer Seiten zweyer rechtwinkligen Dreyecke, deren Catheten AF und BF, und die von F bis zu dem gedachten Punkte liegende Linien wäre.

L. Wenn Sie aber ausser der Linie DF einen Punkt innerhalb des Kreises annehmen, und von diesem nach A und B gerade Linien zögen, würden dann diese Linien auch gleich seyn können?

S. Nein, denn sollte ein Punkt ausserhalb der Linie GH so beschaffen seyn, daß die von ihm nach A und B gezogenen geraden Linien einander gleich wären, so müßte auch, wenn man von ihm nach F eine gerade Linie zöge, diese Linie auch auf AB senkrecht stehen. Da aber DF schon auf AB senkrecht ist, und aus einem Punkte einer geraden Linie nicht mehr als eine senkrechte Linie auf derselben errichtet werden kann, so ist solches unmöglich.

L. Also muß doch der Mittelpunkt des gegebenen Kreises wohl in der Linie GH liegen?

S. Ja.

L. Und was ist also GH für eine Linie?

S. Ein Durchmesser.

L. Und wo wird in demselben der Mittelpunkt des Kreises befindlich seyn?

S. In der Mitte, und ich habe also nur noch nöthig, diesen Durchmesser in zwey gleiche Theile zu theilen.

L. Wie glauben Sie also nun es anfangen zu müssen, um den Mittelpunkt eines Kreises zu finden?

S. Ich ziehe zuvörderst in dem Kreise eine gerade Linie, und theile dieselbe in zwey gleiche Theile. Ferner errichte ich über ihr aus dem Theilungspunkte eine senkrechte Linie, verlängere diese senkrechte Linie auf beyden Seiten bis an den Umkreis. Auf diese Art erhalte ich einen Durchmesser des Kreises, und wenn ich denselben in zwey gleiche Theile theile, so erhalte ich in dem Theilungspunkte den Mittelpunkt des Kreises.

L. Noch die Frage; Wie findet man einen Durchmesser eines Kreises?

S. Man zieht in dem Kreise eine gerade Linie, theilt sie in zwey gleiche Theile, errichtet über ihr aus dem Theilungspunkte eine senkrechte Linie, und verlängert dieselbe nach beyden Seiten bis an den Umkreis.

L. Fig. 51 sind zwey gerade Linien in dem Kreise AB nemlich und AD in E und H in zwey gleiche Theile getheilt, und FG und IK stehen auf ihnen in den Theilungspunkten senkrecht. Was werden also diese beyde senkrechte Linien werden, wenn ich sie bis an den Umkreis verlängere?

S. Durchmesser.

L. Und beyde werden also auch durch den Mittelpunkt gehen?

S. Ja.

S. Ja. — Also kann man ja auch auf die Art den Mittelpunkt eines Kreises finden, daß man darin zwey Sehnen zieht, jede derselben halbiret, und durch den Theilungspunkt senkrechte Linien auf sie zieht, und diese verlängert, bis sie sich schneiden.

L. Allerdings kann man es; allein kürzer ist offenbar der vorhin beschriebene Weg, indem man daselbst nur eine senkrechte Linie zu errichten hat. Indeß habe ich doch auch diesen Weg von Ihnen wollen bemerken lassen. — Nun Sie den Mittelpunkt eines Kreises finden gelernt haben, wird es Ihnen nicht schwer fallen, durch die 50te Figur verschiedene jetzt für uns wichtige Lehrsätze zu finden. Ich will Ihnen Zeit zur Ueberlegung lassen, und in unserer nächsten Unterredung fragen, ob Sie im Finden glücklich gewesen.

Siebentes Gespräch.

L. Sind Sie glücklich im Finden gewesen, indem Sie die 50te Figur für Sich nochmals betrachtet haben?

S. Etwas habe ich zwar gefunden aber nicht viel. Mir sind nemlich folgende Sätze beygefallen:

1. Wenn eine gerade Linie auf einer Sehne, die in zwey gleiche Theile getheilt ist, in dem Theilungspunkte senkrecht steht, so geht dieselbe verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises.

2. Wenn in einem Kreise eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt geht, eine andere in zwey gleiche Theile theilet, so stehen beyde auf einander senkrecht.

3. Wenn in einem Kreise zwey gerade Linien, davon die eine durch den Mittelpunkt gehet, auf einander senkrecht stehen, so wird die andere von jener in zwey gleiche Theile getheilt.

L. Den ersten Satz haben wir gestern auch schon gehabt, aber nur mit andern Worten. Was den zweyten Satz betrifft, so betrachten Sie einmal die 52te Figur. Da theilt die Linie AB die Linie DE, und die Linie DE und die Linie AB in zwey gleiche Theile, denn beyde sind Durchmesser und in C ist der Mittelpunkt des Kreises; allein senkrecht stehen sie doch nicht auf einander.

S. Hier gehen aber auch beyde gerade Linien durch den Mittelpunkt, ich meinte aber in dem 2ten Satze, daß nur die eine durch denselben gehen sollte.

L. Ganz deutlich haben Sie sich wenigstens nicht ausgedruckt, und durch einen kleinen Zusatz, den nemlich, daß die eine nicht durch den Mittelpunkt gehen sollte, hätten

Sie

Sie vollkommen deutlich sich machen können. Vergessen Sie daher künftig diesen Zusatz nicht.

S. Ich habe auch die beyden Bogen AH und HB untersucht, und es scheinen mir dieselben gleich zu seyn. Denn in den Ausschnitten AEH und HEB sind die beyden Winkel am Mittelpunkte AEH und HEB, einander gleich, und die geraden Seiten dieser Ausschnitte sind auch gleich. Wenn ich daher den Winkel HEB so auf den Winkel AEH lege, daß beyde sich decken, so liegt E auf E, H auf A und B auf H, oder E auf E, H auf H und B auf A, und dann müssen die Bogen AH und HB sich einander decken, weil sonst die Linien von C nach diesen Bogen gezogen, d. h. die Halbmesser eines Kreises nicht alle einander gleich wären.

L. Und also wären auch überhaupt zwey Kreisbogen eines Kreises einander gleich?

S. Wenn die Winkel der Ausschnitte, zu welchen sie gehören, einander gleich sind.

L. Ist Ihnen nicht auch eingefallen, wie man einen gegebenen Bogen in zwey gleiche Theile theilt?

S. Daran habe ich nicht gedacht, aber ich sehe nun wohl, daß es mir hätte beyfallen sollen. Denn in der 50ten Figur ist ja der Bogen AB in H in zwey gleiche Theile getheilt. Schwer ist diese Theilung auch nicht. Es giebt eine doppelte Art derselben. Entweder zieht man von den beyden Endpunkten des

Bogens Halbmesser, und theilt darauf den Winkel am Mittelpunkte in zwey gleiche Theile, und verlängert die Linie, welche solches thut, bis sie den gegebenen Bogen schneidet; oder man zieht zwischen den Endpunkten des gegebenen Bogens eine Sehne, theilt dieselbe in zwey gleiche Theile, errichtet aus dem Theilungspunkte eine senkrechte Linie über der Sehne, und verlängert dieselbe bis sie den gegebenen Bogen schneidet.

L. Welche Art der Theilung ist denn wohl die beste?

S. Wenn man den Mittelpunkt des Kreises weiß, so ist ohnstreitig die erstere kürzer; weiß man aber den Mittelpunkt nicht, so wird man auf die letztere Art eher fertig werden.

L. In den drey von Ihnen bey der 50ten Figur gefundenen Sätzen kamen immer zwey Linien in einem Kreise vor, die einander schnitten, und wenn die eine davon durch den Mittelpunkt gieng, so halbirte sie die andere, wenn sie senkrecht darauf stand, und stand darauf senkrecht, wenn sie dieselbe halbirte. Wie ist es denn wohl mit zwey geraden Linien in einem Kreise, die einander schneiden und wovon keine durch den Mittelpunkt geht. Halbiren dieselben etwa einander, so wie jede zwey Durchmesser einander in zwey gleiche Theile theilen?

S. Das muß ich erst untersuchen.

(Er zeichnet sich dazu die 53te Figur und, sagt nach einigem

nigem Nachdenken.) Die eine von diesen beyden Linien kann wohl die andere in zwey gleiche Theile theilen, aber beyde nicht, und dann muß dieselbe schief und nicht senkrecht diese andere schneiden. Denn wenn z. B. Fig. 53 AB in F in zwey gleiche Theile getheilt wäre, so könnten ja durch den Theilungspunkt F eine Menge von Linien gelegt werden, die alle nicht durch den Mittelpunkt giengen; allein senkrecht müßten sie nicht auf AB stehen, denn sonst müßten sie durch den Mittelpunkt gehen. Beyde Linien aber können unmöglich einander in zwey gleiche Theile theilen. Denn wenn das wäre, und man zöge aus dem Mittelpunkte C nach dem gemeinschaftlichen Theilungspunkte eine gerade Linie, so müßte diese auf beyden Linien AB und DE senkrecht stehen, und das ist unmöglich. Denn schlösse sie mit AF einen rechten Winkel ein, so könnte sie solches nicht mit DF thun, und stünde sie senkrecht auf DF, so müßte sie schief auf AF stehen. Wenn also in einem Kreise zwey gerade Linien, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden, so halbiren sie einander nicht.

L. Warum sind Sie nicht von selbst auf diesen Satz gekommen?

S. Wie wäre das möglich gewesen?

L. Haben Sie nicht in den von Ihnen gefundenen Sätzen die Größe der Stücke untersucht, welche zwey gerade Linien in einem

Kreise dadurch, daß sie sich schneiden machen? Die Fälle, die Sie dabey gehabt haben, waren einmal, wenn zwey Durchmesser sich schneiden, zweytens, wenn ein Durchmesser und eine Sehne sich schneiden, und blieb also nicht noch der übrig, wenn zwey Sehnen sich schneiden?

S. Es ist wahr; aber wenn ein Durchmesser und eine Sehne sich schnitten, so thaten sie es senkrecht, es ist ja also hier auch der Fall zu betrachten, wenn sie solches schief thun?

L. Ganz recht. Bestimmen Sie nun nur, wie sichs dann verhalte?

S. Wenn ein Durchmesser eine Sehne schief schneidet, so theilet derselbe die Sehne nicht in zwey gleiche Theile, und wenn eine Sehne von einem Durchmesser nicht in zwey gleiche Theile getheilet wird, so steht derselbe schief auf der Sehne.

L. Gut. Wir haben also, nachdem wir den Mittelpunkt eines Kreises finden gelernt hatten, die Größe der Stücke untersucht, welche in einem Kreise durch das Schneiden zweyer geraden Linien aus denselben entstehen; gelegentlich waren Sie dabey auch schon auf die Untersuchung der Kreisbögen und der Ausschnitte gekommen. Was wird nun weiter folgen?

S. Linien giebt es weiter nicht zu betrachten, also werden wir nun wohl zu den Winkeln

keln und Figuren, die bey einem Kreise vorkommen, fortgehen müssen.

L. Sollte es hier wirklich keine Linien mehr zu betrachten geben? Bisher haben wir uns immer mit geradlinigen Figuren beschäftiget, und wenn wir da die dabey vorkommenden Linien untersuchten, so waren das lauter gerade Linien, und mit der Untersuchung der geraden Linien endigte sich da die Betrachtung der Linien natürlicher Weise auch überhaupt. Aber bey dem Kreise, giebt es da bloß gerade Linien zu betrachten?

S. Da es eine krummlinige Figur ist, wohl nicht; allein da ich von den krummen Linien noch gar nichts gehört habe, so habe ich daran gar nicht gedacht, und ich weiß auch noch nicht, was man dabey zu betrachten hat.

L. Ganz natürlich war es wohl, daß Sie glaubten, daß wir nun sogleich zu den Winkeln fortgehen müßten, und zwar aus eben der Ursach, die Sie angeführt haben. Daraus können Sie sich aber auch die Regel herleiten, daß man um so viel eher glaubt, mit der Untersuchung eines Gegenstandes fertig zu seyn, je weniger man gelernt hat, und daß es eben nicht das beste Kennzeichen ist, wenn man bisweilen glaubt, alles gethan zu haben, oder schon alles zu wissen. Wie, wenn es nun selbst noch gerade Linien zu betrachten gäbe, ehe wir zu den krummen Linien, die beym Kreise vorkommen, fortgehen könnten?

S. Wir haben ja aber schon die Halbmesser, und Durchmesser und Sehnen betrachtet, und weiter giebt es ja bey dem Kreise keine gerade Linien.

L. Wie denn, wenn ich in einem Kreise einen andern Punkt als den Mittelpunkt annähme, könnte ich von demselben nicht ebenfalls Linien bis nach dem Umfange des Kreises ziehen?

S. O ja!

L. Und wie vielerley?

S. Zweyerley; eine, welche durch den Mittelpunkt gienge, und viele andere, welche nicht durch den Mittelpunkt gezogen wären.

L. Von diesen letztern läge eine mit derjenigen, die durch den Mittelpunkt gezogen wäre, in einer geraden Linie, und diese könnte die dritte Art der Linien abgeben, die aus einem beliebigen Punkte in einem Kreise nach dem Umfange desselben gezogen werden können. Betrachten Sie die 54te Figur; in derselben finden Sie alle drey Arten.

S. A B geht durch den Mittelpunkt, A D liegt mit der durch den Mittelpunkt gezogenen A B in einer geraden Linie, und A E und E F gehen nicht durch den Mittelpunkt.

L. Welche von diesen Linien scheint Ihnen die größte zu seyn?

S. Die Linie A B, oder die, welche durch den Mittelpunkt geht.

L. Und welche die kleinste?

S. A D

S. AD, oder diejenige, welche mit der durch den Mittelpunkt gezogenen in einer geraden Linie liegt.

L. Und welche scheint Ihnen von den beyden Linien AE und AF die größere?

S. AE.

L. So verhält es sich auch in der That; allein ehe Sie dies behaupten, müssen Sie im Stande seyn es zu beweisen. Wie wollen Sie also wohl zeigen, daß AB größer ist als AE.

S. (Sinnt eine Zeitlang nach.) Ich dachte mir hier dadurch zu helfen, daß ich beyde Linien zu Seiten eines Dreyecks machte, indem ich die Linie EB zöge; allein ich sehe, daß ich dadurch nichts erreiche, denn ich kenne in dem alsdann entstehenden Dreyecke die Winkel nicht, so daß ich also nicht nach dem Satze: In jedem Dreyecke steht dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber, schließen kann, und das wollte ich thun.

L. Wenn Sie aber die Linie CE zögen, wie hier Figur 55.

S. (Betrachtet die 55te Figur mit angestrengter Aufmerksamkeit.) Wie leicht es nun ist. Nun ist:

$$AB = AC + CE$$

und $AC + CE > AE$

also $AB > AE$.

Auf eben die Art läßt sich nun auch beweisen, daß $AB > AF$. Denn wenn man sich in der 55ten Figur die Linie CF gedenkt;

so ist:

AB = AC + CF
und AC + CF > AF
folglich AB > AF.

L. Sollten Sie diesen Beweis wohl auch ohne Figur zu führen im Stande seyn?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Die Linie, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, besteht aus dem Halbmesser und dem Stücke zwischen dem Mittelpunkte und dem angenommenen Punkte. Jede von den Linien aber, welche anders von dem angenommenen Punkte nach dem Umfange eines Kreises gezogen werden, kann die dritte Seite eines Dreyecks werden, dessen beyde übrige Seiten der Halbmesser und das gedachte Stück ist, und muß also kleiner seyn als diese beyde zusammen genommen, und folglich auch kleiner, als die durch den Mittelpunkt gezogene Linie.

L. Daß AB auch größer sey als AD, wird Ihnen denn wohl keine Schwierigkeit machen?

S. AD ist nur ein Stück eines Halbmessers, und AB ist mehr denn ein Halbmesser.

L. Aber daß AD unter allen aus A gezogenen Linien die kleinste ist; wie beweisen Sie das?

S. Das ist so leicht nicht.

L. Aber demohnerachtet auch nicht schwer. Ist nicht CE Fig. 55 kleiner, als AE + AC?

S. Ja,

S. Ja, denn in jedem Dreyecke ist jede Seite kleiner, als die beyden übrigen zusammen genommen.

L. Und da CE ein Halbmesser ist, so ist doch also auch CD kleiner als AE + AC?

S. Ja.

L. Nun nehmen Sie von CD so wohl als von AE + AC das Stück AC weg. Gleiches von ungleichen weggenommen läßt ungleiches, und da bleibt das größere, wo das größere war.

S. So kommt heraus, daß AD < AE.

L. Gedenken Sie Sich nun noch einmal den Halbmesser CF in der 55ten Figur, und beweisen Sie, daß AD auch kleiner sey als AF.

S. Es ist:

$$CF < AF + AC$$
$$CF = CD$$
also $$CD < AF + AC.$$

Da nun

$$CD = AC + AD$$
so ist auch $$AC + AD < AF + AC$$
und $$AD < AF.$$

L. Sind Sie wohl im Stande, aus dem Punkte A auf der einen Seite der Linie AB nach dem Umkreise zwey gerade Linien zu ziehen, die einander gleich sind?

S. Nein, denn je weiter ich mich von AB entferne, desto kleiner werden die Linien, die aus A gezogen werden können.

L. Wie so? Das haben Sie ja noch nicht bewiesen.

S. Es

S. Es ist wahr, aber es läßt sich leicht beweisen. Denn wenn ich mir in der 55ten Figur auch den Halbmesser CF gedenke, so habe ich da zwey Dreyecke, in welchen zwey Seiten gleich, die von denselben eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind. Es müssen also darin auch die dritten Seiten ungleich seyn, und das sind die linien, von welchen wir reden. Die linie CF gedacht, so ist:

AC = AC
und CE = CF
hingegen ACF < ACE
und also AF < AE.

L. Allein wenn auf der einen Seite aus dem Punkte A eine gerade linie z. B. AE gezogen ist, so ist es doch wohl möglich, auf der andern Seite der linie AB eine ihr gleiche zu ziehen?

S. Ja. Denn wenn man den Winkel ACE, nachdem man CE gezogen hat, auf der andern Seite der linie AB an C legt, wie Fig. 56, in welcher ACG = gleich ACE ist, und die linie AG zieht, so ist AG gleich AE. Denn

△ ACE = △ ACG
weil CE = CG
AC = AC
und ACE = ACG und also
auch AE = AG. Aber mehr als diese eine gleiche linie sind nicht möglich.

L. Wenn man also aus einem Punkte innerhalb eines Kreises, der nicht der Mittel-

punkt

punkt ist, gerade Linien nach dem Umfange des Kreises zieht, so ist:

1. diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, unter allen die größte.

2. Diejenige, welche mit der durch den Mittelpunkt gezogenen in einer geraden Linie liegt, unter allen die kleinste.

3. Eine jede dieser Linien größer oder kleiner als eine andere, je nachdem sie näher oder weiter vom Mittelpunkte entfernt ist, und

4. lassen sich aus dem gedachten Punkte nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien nach dem Umkreise ziehen, und von diesen beyden gleichen Linien liegt die eine auf der einen, und die andere auf der andern Seite der Linie, welche durch den Mittelpunkt geht. — Hier haben wir also doch noch, nicht einen, sondern mehrere Sätze, welche gerade Linien beym Kreise betreffen, gefunden. Wir wollen noch nicht zu dem Umfange des Kreises und den Bogen fortgehen, sondern eben so als wir vorhin einen Punkt innerhalb des Kreises annahmen, nun auch einen ausserhalb des Kreises annehmen.

S. Lassen Sie mich hier versuchen, ob ich nicht allein einige Sätze zu finden im Stande bin.

L. Sehr gern.

S. (Nachdem er die 57te Figur sich gezeichnet, und sie aufmerksam betrachtet hat.) Hier giebt es

nur

nur zwey Arten von Linien. Eine Linie geht durch den Mittelpunkt, die übrigen aber nicht. Auch hier ist

1. diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, die größte von allen; AB ist größer als AD, und auch größer als AE. Denn wenn wenn man den Halbmesser CD zieht, so ist

$$AC + CD \rhd AD, \text{ und}$$

$$\text{da } AC + CD = AB, \text{ so muß}$$

auch $AB \rhd AD$ seyn.

Daß AB auch größer als AE ist, beweißt man auf eben die Art, nachdem man den Halbmesser CE gezogen hat.

2. Ist eine jede dieser Linien größer, als jede andere, die weiter als sie von dem Mittelpunkte entfernt ist. So ist z. B. AD größer als AE. Denn denke man sich in der 57ten Figur noch den Halbmesser CE gezogen; so ist in den Dreyecken ACD und ACE

$$AC = AC,$$

$$\text{und } CD = CE$$

$$\text{hingegen } ACD \rhd ACE \text{ und}$$

$$\text{folglich } AD \rhd AE.$$

3. Lassen sich von dem angenommenen Punkte ausserhalb des Kreises nach dem Umfange desselben nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien ziehen, die aber auf zwey verschiedene Seiten der Linie fallen, welche durch den Mittelpunkt geht. Wenn z. B. $ACD =$ ACF, so ist auch $AF = AD$. Denn alsdann ist:

△ACF = △ACD
weil AC = AC
CF = CD
und ACF = ACD, und
folglich AF = AD. Ausser AF aber ist keine mehr der AD gleich, sondern jede andere ist entweder gröſſer oder kleiner als dieselbe.

L. Was Sie da behauptet haben, ist alles richtig und gut; ist es aber auch wohl alles, was hier behauptet werden kann?

S. Nach dem vorhergehenden zu urtheilen, so dünkt mir weiter nichts übrig.

L. Aber vorhin waren auch alle aus dem angenommenen Punkte gezogene linien innerhalb auf den Umkreis gezogen, und hier haben wir auch solche, die ausserhalb auf denselben stehen. Betrachten Sie nur hier die 58te Figur.

S. Also sind da noch die linien AG, AH, AI und AK zu betrachten. Mit diesen verhält es sich anders; denn diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht, scheint hier unter allen die kleinste zu seyn. (Nach einigem Nachdenken) Nun weiß ich schon, was ich hier zu behaupten habe. Wenn man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises ausserhalb auf dem Umfang desselben gerade linien zieht, so ist

1. diejenige, die verlängert durch den Mittelpunkt geht, die kleinste. Denn (der Schüler zeichnet die 59te Figur) in dem Dreyecke AHC ist

AH + HC > AC, und
da AC = AG + GC, so ist
auch AH + HC > AG + GC. Da
nun HC = GC, so ist
auch AH > AG. Auf eben die Art
kann man auch darthun, daß AI > AG.

2. ist von denen Linien, die verlängert nicht durch den Mittelpunkt gehen, diejenige immer die größere, die von dem Mittelpunkte weiter entfernt ist. In der 59ten Figur ist z. B.
AI > AH. Denn in den Dreyecken AIC und AHC ist
AC = AC und
IC = HC, hingegen
ACI > ACH, und
daher AI > AH. Folglich können auch aus dem gedachten angenommenen Punkte auf der einen Seite der Linie, die verlängert durch den Mittelpunkt geht, nicht zwey gleiche gerade Linien ausserhalb auf dem Umkreis gezogen werden. Aber auf der andern Seite dieser Linie aber kann man

3. eine ziehen, welche einer auf der ersten Seite gleich ist. Denn wenn man
ACK = ACI macht, so wird
△ACK = △ACI,
weil AC = AC
CK = CI
und ACK = ACI. Also ist
dann auch AK = AI.

L. Sollten wir nun nicht mit der Betrachtung der bey dem Kreise vorkommenden geraden Linien fertig seyn?

S. Nun gewiß.

L. Haben wir denn auch schon mehrere Sehnen mit einander verglichen, und untersucht, wenn zwey Sehnen eines Kreises gleich und wenn sie ungleich sind?

S. Nein.

L. Da eröffnet sich uns wieder ein neues Feld, das dichte an das bisher durchlaufene gränzt. Bey der vorhergehenden Untersuchung führte uns der Schein auf das, was wir nachher bey einer genauern Untersuchung mit Gewißheit als wahr erkannten; vielleicht, daß er uns auch jetzt nicht ganz unnütze ist. Betrachten Sie daher diese (die Sote) Figur, welche einen Kreis vorstellt, in welchem verschiedene Sehnen in ungleicher Entfernung vom Mittelpunkte gezogen sind. Wie scheinen sich Ihnen die Sehnen, die auf einer Seite des Mittelpunkts liegen, in Ansehung ihrer Größe zu verhalten?

S. Sie scheinen alle ungleich, und desto kleiner zu werden, je weiter sie von dem Mittelpunkte entfernt sind.

L. Sind aber unter den Sehnen auf beyden Seiten nicht auch einige, die einander gleich scheinen?

S. Ja; je zwey und zwey, die vom Mittelpunkte gleich weit entfernt zu liegen

scheinen, scheinen auch einander gleich zu seyn.

L. Wenn das sich in der That so verhielte, so hätten wir bey den Sehnen Sätze, die Sie Sich wegen ihrer Aehnlichkeit mit den vorhergehenden nun leicht merken würden. Wir wollen daher untersuchen, nur muß ich Ihnen zuvor sagen, daß man unter der Entfernung einer Sehne vom Mittelpunkte diejenige gerade Linie versteht, die aus dem Mittelpunkte auf sie senkrecht gezogen ist. Figur 61 z. B. ist CF auf AB und CG auf DE senkrecht, und CF heißt daher die Entfernung der Sehne AB und CG die Entfernung der Sehne DE vom Mittelpunkte. Was geschieht also, wenn man in einem Kreise die Entfernung einer Sehne in einer geraden Linie darstellt?

S. Die Sehne wird dadurch in zwey gleiche Theile getheilt, weil eine jede aus dem Mittelpunkte auf eine Sehne senkrecht gezogene Linie die Sehne in zwey gleiche Theile theilt.

L. Also ist in der 61ten Figur?

S. AF = FB und DG = GE.

L. Vorhin schienen Ihnen die Sehnen, die vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, einander gleich zu seyn. Nehmen Sie nun an, daß Fig. 61. CF = CG, und untersuchen Sie nun, ob dann AB auch DE gleich ist.

S. Dann muß ich die Sehnen AB und DE zu Seiten von Dreyecken machen, und diese Dreyecke untersuchen. Ich will also die

Linien

linien AC, CB, DC und CE ziehen. (Der Schüler zeichnet die 62te Figur) — — Ob die Dreyecke ACB und DCE gleich sind oder nicht, läßt sich aber nicht beurtheilen, denn es läßt sich keiner von den Sätzen von der Gleichheit der Dreyecke darauf anwenden.

L. Haben Sie in der 62ten Figur bloß die Dreyecke ACB und DCE?

S. Es sind darin auch vier rechtwinklige Dreyecke nemlich ACF, FCB, DCG und GCE.

L. Sind darunter nicht etliche gleich?

S. In allen vieren sind zwey Seiten und ein Winkel gleich, es ist nemlich

$$CF = CG \text{ und}$$

$$AC = CB = CD = CE, \text{ als Halbmesser eines Kreises,}$$

und $AFC = CFB = DGC = CGE = R$; allein das ist nicht hinreichend, denn der gleiche Winkel wird nicht von den gleichen Seiten eingeschlossen.

L. Da es rechtwinklige Dreyecke sind, so können wir vielleicht sonst einen Satz darauf anwenden.

S. Den pythagorischen Lehrsatz können wir wohl anwenden, allein was kann uns der hier helfen?

L. Wer weiß?

S. Dann ist:

$$ACq = AFq + FCq$$

$$CBq = FBq + FCq$$

DFA CDq

$CDq = DGq + CGq$ und
$CEq = GEq + CGq$.

L. Und da $AC = CB = CD = CE$, so sind auch die Quadrate aller dieser Linien?

S. Einander gleich.

L. Und dann folgt.

S. $AFq + FCq = FBq + FCq = DGq + CGq = GEq + CGq$.

L. Und wie sind die Quadrate FCq und CGq, da $FC = CG$, beschaffen?

S. Auch einander gleich.

L. Also ziehen Sie gleiches von gleichem ab.

S. Dann ist $AFq = FBq = DGq = GEq$.

L. Wie sind nun die Seiten gleicher Quadrate beschaffen?

S. Einander gleich.

L. Also?

S. Also ist $AF = FB = DG = GE$.

L. Was folgt daraus für die Sehnen AB und DE?

S. Daß sie einander gleich sind. Denn da
$AF = DG$ und
$FB = GE$, so muß auch
$AF + FB = DG + GE$ oder
$AB = DE$ seyn.

L. Sie können sich davon auch noch auf eine kürzere Art überzeugen. Es ist nemlich Figur 62.

$ACq = AFq + FCq$ und
$CDq = DGq + CGq$. Folglich

AFq

AFq + FCq = DGq + CGq und
da FCq = CGq, weil FC = CG,
so ist AFq = DGq und
also auch AF = DG. Nun sind die Linien AF und DG die Hälften der Sehnen AB und DE, und da diese Hälften gleich sind, so müssen auch die ganzen Sehnen gleich seyn. — Wenn also die Entfernungen zweyer Sehnen eines Kreises vom Mittelpunkte gleich sind, so sind auch die Sehnen gleich. Wie meinen Sie nun, daß es mit den Entfernungen seyn werde, wenn zwey Sehnen gleich sind?

S. Dann sind die Sehnen auch gleich. Denn wenn, um die 62te Figur zu gebrauchen,

AB = DE ist, und
AF = FB = DG = GE gemacht, und aus F und G nach dem Mittelpunkte C die Linien FC und CG gezogen werden, so stehet FC auf AB und CG auf DE senkrecht, und sind daher die Entfernungen der Sehnen AB und CE vom Mittelpunkte C. Zieht man nun AC und CD, so ist

ACq = AFq + FCq und
CDq = DGq + CGq und
also AFq + FCq = DGq + CGq.
Weil nun AF = DG;
so ist AFq = DGq, und nun
also auch FCq = CGq, und daher
FC = CG.

L. Nun zu der Betrachtung der Sehnen, die vom Mittelpunkte ungleich weit entfernt

sind. Ich habe Ihnen hier (Fig. 63) die zur Untersuchung nöthige Figur selbst mit den Hülfslinien gezeichnet. FC ist darin die Entfernung der Sehne AB, und CG die Entfernung der Sehne DE vom Mittelpunkte C. Es sey nun FC > CG; was folgt daraus für die Sehnen?

S. Da in den Dreyecken AFC und DCG die Winkel AFC und DGC rechte Winkel sind, so ist

ACq = AFq + FCq und

DCq = DGq + CGq, also

AFq + FCq = DGq + CGq. Hierunter habe ich aber keine gleiche Quadrate, und folglich kann ich auch nicht weiter fortfahren.

L. Haben Sie etwa Quadrate darunter, von denen Sie mit Gewißheit wissen, daß sie ungleich sind?

S. Ja, denn es ist

FCq > CGq

weil FC > CG.

L. Wenn man ungleiches von gleichem wegnimmt, bleibt dann gleiches oder ungleiches übrig?

S. Ungleiches.

L. Und wo bleibt das größere übrig? da, wo man das größere, oder da, wo man das kleinere wegnimmt?

S. Da muß das größere übrig bleiben, wo man das kleinere wegnimmt, denn je weniger

niger man wegnimmt, desto mehr muß natürlicher Weise übrig bleiben.

L. Handeln Sie hier darnach.

S. Da $AFq + FCq = DGq + CGq$ u. $FCq > CGq$, so

ist $AFq < DGq$, und also

auch $AF < DG$, weil die Seiten der Quadrate in Ansehung ihrer Größe sich nach den Quadraten richten.

L. Wenn also zwey Sehnen eines Kreises vom Mittelpunkte ungleich weit entfernt sind, so sind die Sehnen?

S. Auch ungleich, und zwar ist diejenige die größere, die dem Mittelpunkte näher, und diejenige die kleinere, die von demselben weiter entfernt ist.

L. Wie wird es nun mit den Entfernungen sich verhalten, wenn die Sehnen ungleich sind?

S. Je größer die Sehne, desto kleiner ist ihre Entfernung, und je kleiner die Sehne, desto größer ist ihre Entfernung. Denn wenn Figur 63

$DE > AB$ und

also auch $DG > AF$, und ferner

$DGC = AFC = R$; so ist

$DCq = DGq + CGq$ und

$ACq = AFq + FCq$ und

also $DGq + CGq = AFq + FCq$.

Da nun $DGq > AFq$, weil

$DG > AF$; so

ist CGq < FCq und also
auch CG < FC.

L. Von diesen die Sehnen eines Kreises und ihre Entfernungen vom Mittelpunkte betreffenden Sätzen können wir einen sehr wichtigen Gebrauch machen, welchen Sie in unserer nächsten Unterredung kennen lernen sollen. Die Menge der heute durchgenommenen Sätze wird doch dem Behalten derselben nicht schaden?

E. Ich werde sie für mich nochmals recht sorgfältig durchdenken, und mir vest einzuprägen suchen.

Achtes Gespräch.

L. Jetzt wollen wir von dem Satze: In einem jeden Kreise sind die Sehnen, die weiter vom Mittelpunkte abstehen, kleiner und diejenigen, welche demselben näher sind, größer, die Anwendung machen, wovon ich am Ende unserer letzten Unterredung gesprochen habe. Betrachten Sie zu dem Ende die 64te Figur. In derselben sind in dem Kreise Q verschiedene Sehnen und ein Durchmesser gezogen worden. Der Durchmesser ist AB, und die Sehnen sind DE, FG, HI, KL, und diese Sehnen stehen ungleich weit vom Mittelpunkte C ab, KL ist die entfernteste, HI die zunächst fol-

folgende, dann kommt F G und dann D E. In Ansehung der Größe folgen sie aber in der vorhin angeführten Ordnung auf einander. C M, C N, C O und C P stehen auf den Sehnen senkrecht, und sind also ihre Entfernungen vom Mittelpunkte. Durch die in der Figur gezogenen Halbmesser D C, E C, F C, G C, H C, I C, K C, L C sind Winkel am Mittelpunkte entstanden, welche man als zu den Sehnen, nach deren Endpunkten die Halbmesser, welche sie einschließen, gezogen sind, betrachten kann. Dies vorausgesetzt, so entsteht die Frage: Zu was für einer Sehne gehört ein größerer Winkel am Mittelpunkte, zu der größern oder zu der kleinern?

S. Zu der größern. Denn wenn zu der größern Sehne D E der Winkel D C E, und zu der kleinern F G der Winkel F C G gehört, so muß der Winkel D C E größer seyn als der Winkel F C G, weil beyde in den beyden Dreyecken D C E und F C G, worin zwey Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, diesen dritten Seiten gegenüber stehen, und D C E in dem Dreyecke befindlich ist, in welchem die dritte Seite größer ist, als in dem andern. Auf eben die Art läßt sich auch beweisen, daß der Winkel F C G größer als der Winkel H C I, und H C I ebenfalls größer als der Winkel K C L ist, weil F G größer als H I und H I größer als K L ist.

L. Umgekehrt wird also auch wohl eine Sehne, die zu einem größern Winkel am Mittelpunkte gehört, größer seyn, als die, welche zu einem kleinern Winkel gehört?

S. Ja; denn wenn man zu zwey verschiedenen Winkeln am Mittelpunkte die zugehörigen Sehnen zieht, so erhält man Dreyecke, in welchen zwey Seiten gleich, die von denselben eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, und man kann daraus, daß in dergleichen Dreyecken die dritten Seiten und zwar eben so als die Winkel ungleich sind, sogleich die gedachte Behauptung für die Sehnen herleiten.

L. Was thut nun die Linie CR, die in M, N, O und P durch die Sehnen getheilt ist, und auf allen Sehnen senkrecht steht, so wohl den Winkeln am Mittelpunkte, als den Sehnen?

S. Sie theilt sowohl die Winkel am Mittelpunkte, als die Sehnen in zwey gleiche Theile.

L. Die auf diese Art entstandenen Hälften der Sehnen betrachtet man nun ebenfalls als zu den durch die gedachte Theilung entstandenen Winkeln gehörig, DM gehört zu DCR, FN zu FCR, HO zu HCR, und KP zu KCR. Je größer also auch eine von diesen Linien DM, FN, HO und KP ist, desto größer ist auch?

S. Der zugehörige Winkel am Mittelpunkte.

L. Und je größer der Winkel am Mittelpunkte ist?

S. Desto größer ist auch jede dieser zu demselben gehörigen Linien.

L. Ehe wir weiter gehen muß ich Sie darauf aufmerksam machen, daß von den ganzen Winkeln am Mittelpunkte ein jeder kleiner ist, als 2 R, und ein jeder halber daher kleiner als ein rechter Winkel. Sie hätten sich zwar fürs erste keine andere Winkel gedacht; allein so bald wir in der Folge noch einmal auf die gegenwärtige Betrachtung kommen, so werde ich auch von Winkeln mit Ihnen sprechen müssen, die größer sind, als 2 R, und deren Hälften daher auch mehr als einen rechten Winkel ausmachen. — Nun sagen Sie mir was sind die Linien DM, FN, HO, und KP für Linien? oder wie muß und kann man sie beschreiben, wenn man sie als zu den Winkeln DCR, FCR, HCR und KCR gehörig betrachtet?

S. (Sinnt nach.)

L. Wie stehen diese Linien auf dem einen Schenkel der zu ihnen gehörigen Winkel?

S. Senkrecht.

L. Und von wo an sind sie auf demselben senkrecht gezogen?

S. Von dem andern Schenkel.

L. Oder

L. Oder besser von einem Punkte des andern Schenkels. Also noch einmal: Was sind DM, FN, HO und KP für Linien?

S. Es sind Linien, die aus einem Punkte des einen Schenkels eines Winkels auf dem andern Schenkel senkrecht gezogen worden sind.

L. In der Figur ist nun der Punkt, aus welchem in dem einen Schenkel auf dem andern eine senkrechte Linie gezogen worden, allenthalben von der Spitze des Winkels gleich weit entfernt, und unter diesen Umständen bleibt daher, aber auch nur unter dieser Bedingung, alles von den Linien DM, FN, HO und KP und ihren zugehörigen Winkeln behauptete wahr, wenn auch gleich diese Linien und Winkel nicht so wie Fig. 64 in einem Kreise liegen; und wenn man will, so kann man sie, die beschriebene Beschaffenheit vorausgesetzt, jedesmal leicht so in einen Kreis legen, als es Fig. 64 zeigt. Wenn der Kreis Q einem grössern Halbmesser hätte, so würden offenbar die Linien DM, FN, HO und KP insgesammt grösser, so wie dann kleiner geworden seyn, wenn der Halbmesser des Kreises Q kleiner angenommen worden wäre. Will man daher von einer Linie als DM, FN, HO und KP sind, einen ganz vollständigen Begriff haben, so muß man nicht nur den Winkel kennen, zu welchem sie gehören, sondern auch die Länge des Schenkels, aus dessen Endpunkte sie auf den andern Schenkel senkrecht gezogen sind;

und

und jenen Schenkel pflegt man dann auch den Halbmesser zu nennen, so wie er z. B. in unserer Figur auch wirklich ein Halbmesser ist. Uebrigens sind die gedachten senkrechten Linien in der Mathematik Linien von der äussersten Wichtigkeit, und wir müssen sie daher, wenn es hier gleich noch nicht vollständig geschehen kann, uns so weit als möglich wenigstens bekannt zu machen suchen. So wie jeder merkwürdige Gegenstand in der Mathematik, um der Kürze in der Beschreibung willen, seinen besondern Namen hat, so fehlt es auch solchen Linien, als DM, FN, HO und KP sind, nicht daran; man nennt sie Sinus derer Winkel, von welchen ich vorhin sagte, daß man sie als zu diesen Linien gehörig betrachtete, und schreibt diese Benennung gewöhnlicher Weise abgekürzt sin. Es ist also Fig. 64

DM = sin. DCR
FN = sin. FCR
HO = sin. HCR und
KP = sin. KCR. Was von den Linien DM, FN, HO und KP gilt, muß, wie sehr leicht in die Augen fällt, auch von den Linien EM, GN, IO und LP gelten. Was behaupten Sie also davon?

S. Es ist

EM = sin. ECR
GN = sin. GCR
IO = sin. ICR und
LP = sin. LCR.

L. Wie

L. Wie verhalten sich also die Sinus der Winkel, die kleiner sind als ein rechter Winkel, wenn die Winkel größer werden, und einerley Halbmesser bleibt.

S. Die Sinus werden dann ebenfalls größer.

L. Wenn aber die Winkel kleiner werden?

S. Dann werden auch die Sinus kleiner.

L. Es wachsen also und nehmen die Sinus mit ihren Winkeln ab, vorausgesetzt, daß diese kleiner sind als ein rechter Winkel, denn von den Sinus der stumpfen Winkel haben wir noch nicht gesprochen. Wie groß ist aber wohl der Sinus eines rechten Winkels?

S. Ein rechter Winkel hat gar keinen Sinus.

L. Betrachten Sie einmal den rechten Winkel ACR Fig. 64. Wenn daselbst AC dem Halbmesser gleich ist, für welchen der Sinus gezogen werden soll, wo müssen Sie dann den Sinus anfangen zu ziehen?

S. In A.

L. Und wie weit?

S. Bis auf den andern Schenkel CR.

L. Und erhalten Sie alsdann keine Linie? Liegt denn der Punkt A in der Linie CR?

S. Ich erhalte die Linie AC, oder den Halbmesser.

L. Und der Sinus eines rechten Winkels ist also so groß als der Halbmesser. Vergleichen Sie hiermit die Sinus aller möglichen

spitzi-

spitzigen Winkel. Können diese Sinus auch wohl jemals so groß werden als der Halbmesser?

S. Nein.

L. Unter den bisher betrachteten Sinus ist also der Sinus des rechten Winkels der größte. Wenn wir an die Betrachtung der Sinus der stumpfen Winkel kommen werden, so wollen wir sehen, ob es da noch größere Sinus giebt, oder nicht.

S. Die Sinus der stumpfen Winkel müssen ja natürlicher Weise größer seyn, als der Sinus eines rechten Winkels, denn der stumpfe Winkel ist ja größer als ein rechter.

L. So entscheidend sprechen Sie, daß Sie sagen, natürlicher Weise? Was man noch nicht untersucht hat, darüber muß man nicht entscheidend urtheilen wollen, und zu seiner Zeit werden Sie schon erfahren, daß Sie einmal wieder vorschnell gewesen sind. Doch dies jetzt bey Seite. Mit dem Sinus der Winkel steht eine andere Linie in Verbindung, die man Cosinus nennt und abgekürzt cos. schreibt, z. B. cos. DCR, cos. FCR u. s. w. Wie es sich mit dieser Linie verhalte, können Sie sehr leicht finden, wenn Sie sich nur vorstellen, daß Cosinus so viel ist, als der Sinus des Complements eines Winkels, und daß man unter dem Complemente eines Winkels denjenigen Winkel versteht, der mit einem andern zusammen genommen einen rechten Winkel ausmacht. Nur zuvor ein paar Fragen:

Welches von zweyen Complementen ist das größere; dasjenige, welches zu einem größern, oder das, welches zu einem kleinern Winkel gehört?

S. Dasjenige, welches zu dem kleinern Winkel gehört ist größer als das andere, denn das Complement ist der Winkel, der einem andern zu einem rechten Winkel fehlt, und je größer ein Winkel ist, desto weniger fehlt ihm an einem rechten Winkel, und desto kleiner ist also auch sein Complement.

L. Wie groß ist denn wohl das Complement eines Winkels, der gar keine Größe hat, oder Null ist, wie man auch zu sagen pflegt?

S. Dies muß ein rechter Winkel seyn, denn wenn der eine gar keine Größe hat, und man durch Hinzusetzung eines andern Winkels einen rechten Winkel daraus machen will, so muß dieser nothwendiger Weise ein rechter Winkel seyn.

L. Wie werden sich also die Cosinus der spitzigen Winkel verhalten, wenn die Winkel wachsen?

S. Dann werden die Cosinus kleiner, weil dann die Complemente kleiner werden, und die Cosinus Sinus der Complemente sind.

L. Und wenn die Winkel abnehmen?

S. Dann werden die Cosinus größer.

L. Also wachsen die Cosinus, wenn ihre Winkel abnehmen, und nehmen ab, wenn die Winkel zunehmen. Doch auch hier muß ich noch=

nochmals erinnern, daß ich bloß von spitzigen Winkeln gesprochen habe.

S. Von stumpfen Winkeln kann auch hier wohl nicht gesprochen werden, denn die sind an sich schon größer als ein rechter Winkel, und brauchen also kein Complement, um zu einem rechten ergänzt zu werden.

L. Man könnte doch aber wohl von den stumpfen Winkeln so ein Stück abschneiden, daß der Rest einem rechten Winkel gleich wäre? und wie, wenn man dann das abgeschnittene Stück das Complement des stumpfen Winkels nennte?

S. Dann wäre aber das Complement eines Winkels nicht ein Winkel, der einen andern zu einem rechten Winkel ergänzte, denn wenn das geschehen soll, so muß man ja etwas hinzusetzen.

L. Das soll auch bey den stumpfen Winkeln durch ihr Complement geschehen, aber wie, darüber müssen Sie sich noch etwas gedulden. Jetzt betrachten Sie die 65te Figur. ACB ist darin ein rechter Winkel, und o also das Complement von x, so wie auch x das Complement von o. Da DEC so wohl als DFC rechte Winkel sind, so ist DE, was für eine Linie?

S. Sin. x.

L. Und DF?

S. Sin. o.

L. Da aber o das Complement von x und x das Complement von o ist, so ist auch DE?

S. cos. o.

L. Und DF?

S. cos. x.

L. Was ist DFCE für eine Figur?

S. Ein Parallelogramm.

L. Und was für Linien sind also darin gleich?

S. DE = FC und DF = EC.

L. Also kann ich doch auch wohl EC als den Cosinus von x betrachten?

S. Warum nicht.

L. Was ist EC für eine Linie? Wozwischen liegt sie?

S. Zwischen den Sinus und der Spitze des Winkels zu welchen der Sinus gehört.

L. Also kann man auch den Cosinus eines Winkels erklären?

S. Der Cosinus eines Winkels ist die gerade Linie oder das Stück von dem einen Schenkel desselben, welches zwischen dem Sinus und der Spitze des Winkels liegt, zu welchem der Sinus gehört.

L. Was ist das Dreyeck DEC für ein Dreyeck?

S. Ein rechtwinkliges.

L. Und jeder Sinus macht mit seinem Cosinus und Halbmesser doch stets ein rechtwinkliges Dreyeck?

S. Ja.

L. Und zwar ein solches, worin der Halbmesser jederzeit die Hypothenuse und der Sinus und Cosinus die Catheten sind?

S.

S. Ja.

L. Und das Quadrat einer jeden Cathete ist daher so groß?

S. Als das Quadrat der Hypothenuse weniger dem Quadrate der andern Cathete.

L. Je größer also, wenn die Hypothenuse, wie hier, unverändert bleibt, das Quadrat der einen Cathete ist, desto größer ist doch auch das Quadrat der andern Cathete.

S. Nein desto kleiner, denn beyde Quadrate der Catheten sind so groß, als das Quadrat der Hypothenuse, und je größer also das eine ist, desto kleiner muß das andere seyn.

L. Eben so verhält es sich nun auch in Ansehung des Wachsens und Abnehmens der Catheten selbst. Je größer bey unveränderter Hypothenuse die eine Cathete wird, desto kleiner wird die andere, und umgekehrt. Wenn wir nun anstatt des Namens Cathete die Benennungen Sinus und Cosinus setzen, was erhalten wir dann für einen Satz?

S. Je größer der Sinus eines Winkels ist, desto kleiner ist sein Cosinus, und je kleiner der Sinus ist, desto größer ist sein Cosinus.

L. Noch einen Blick auf die 65te Figur geworfen. Ist nicht darin DE = FC = sin. x = cos. o?

S. Ja.

L. Und nicht auch DF = EC = sin. o = cos. x?

S. Ja.

L. Folglich kann ich auch jedesmal den Sinus eines Winkels statt des Cosinus des Complements, und den Cosinus statt den Sinus des Complements setzen, und umgekehrt. Folglich ist der Cosinus eines Winkels, der Null ist?

S. Gleich dem Halbmesser, denn der Cosinus eines Winkels der Null ist, ist gleich dem Sin. R, und dieser ist dem Halbmesser gleich.

L. So weit diesmal von den Sinus und Cosinus der Winkel. Sollten wir nicht noch eine gerade Linie bey dem Kreise zu betrachten haben?

S. Ja, die Tangente.

L. Allerdings ist diese nun auch noch übrig. Was verstehen Sie unter einer Tangente?

S. Eine gerade Linie, die den Kreis nur in einem Punkte berührt.

L. Dies ist eine Beschreibung der Tangente, die wir dazu benutzen müssen, um uns ein brauchbares Kennzeichen zur Beurtheilung, ob eine gerade Linie eine Tangente sey oder nicht, daraus herzuleiten. Wann berühret also wohl eine gerade Linie den Kreis nur in einem Punkte? Nehmen Sie, um die Antwort auf diese Frage zu finden, einmal an, daß HBI. Fig. 45 den Kreis daselbst einzig und allein in dem Punkte B berühre. Wie wollen Sie nun die Lage dieser Linie HBI gegen den Kreis bestimmen?

S. Durch einen Winkel, welchen sie mit einer andern Linie macht.

L. Gut, dadurch bestimmt man allerdings die Lage einer geraden Linie, wenn man den Winkel, den sie mit einer andern macht, angiebt, vorausgesetzt, daß diese andere Linie bekannt ist. Allein hier giebt es nun zwey Winkel, den vermischtlinigen HBE, und den geradlinigen HBC; welchen wollen Sie nehmen?

S. Den geradlinigen HBC, denn die vermischtlinigen Winkel kenne ich noch nicht.

L. Gut. Was ist also BC für eine Linie? denn diese Linie müssen wir, wie ich schon gesagt habe, vor allen Dingen kennen.

S. Ein Halbmesser.

L. Aber nach was für einem Punkte des Kreises gezogen?

S. Nach demjenigen Punkte, in welchem die Tangente den Kreis berührt.

L. Kürzer können Sie sich so ausdrücken: Ein Halbmesser der nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogen ist. Vorausgesetzt nun, das man nach dem Winkel HBC bestimmen will, ob HBl eine Tangente ist oder nicht, das heißt, ob sie bloß in dem Punkte B den Kreis berührt, und sonst ganz außer dem Kreise liegt; was muß dann HBC für ein Winkel seyn?

S. Dem Scheine nach zu urtheilen, ein rechter Winkel. Allein bey dem Scheine darf ich nicht stehen bleiben; ich will also weiter

nachdenken. Wenn die linie HBI, den Punkt B ausgenommen, ganz außer dem Kreise liegen soll; so muß ein jeder Punkt in ihr außer B, weiter von C entfernt seyn, als B es ist. Denn wäre ein anderer Punkt eben so weit von C entfernt, als B es ist, so läge er mit B in dem Umkreise, und dann wäre HBI sogar nicht einmal eine gerade linie, und noch weniger eine Tangente; wäre er aber näher, so läge ein Theil der linie HBI in dem Kreise, und das darf auch nicht seyn. — Wie muß nun dazu der Winkel HBC beschaffen seyn, wenn jede linie von C nach einem jeden Punkte ausser B gezogen grösser als BC seyn sollen? — Nun sehe ich schon, daß der Schein mich diesmal wieder auf das wahre geführt hat. Wenn HBC = R, so ist HBI eine Tangente. Denn wenn HBC = R, so ist auch der Nebenwinkel IBC = R. Ist dies so liegen alle Punkte der linie HBI außer B außer dem Kreise. Denn man nehme einen Punkt in HBC z. B. K Fig. 66 an, und ziehe KC. Dann ist KBC der größte Winkel in dem Dreyecke KBC, weil er ein rechter ist, und also auch KC > BC, und K liegt außer dem Kreise. K mag übrigens liegen, wo es will, derselbe Beweis kann für einen jeden Punkt der linie HBI außer B geführt werden.

L. Nun Sie dieses Kennzeichen haben, wird es Ihnen auch nicht schwer fallen die Frage zu beantworten: Wie zieht man für einen

nen

nen gegebenen Punkt eines Kreises die Tangente?

S. (Denkt eine Zeitlang nach) Man zieht erst einen Halbmesser des Kreises durch den gegebenen Punkt, und richtet alsdann aus dem Endpunkte desselben eine senkrechte Linie auf. Wenn man z. B. Fig. 66 die Tangente für den Punkt B erst ziehen sollte, so dürfte man nur BC ziehen, und dann HBC = R machen und HB verlängern

L. Sie kennen nun die Tangente eines Kreises ihren Eigenschaften nach. Wie groß ist aber wohl eine Tangente eines Kreises?

S. Sie ist unbegränzt, wie Sie mir auch schon einmal gesagt haben.

L. Gut, daß Sie sich auch dies gemerkt haben, denn man muß es wissen, um die Tangenten eines Kreises von den Tangenten der Winkel zu unterscheiden. Denn so wie man die Sinus und Cosinus, als zu Winkeln gehörig betrachtet, so hat man auch Tangenten und Cotangenten der Winkel. Diese sind nicht, wenigstens die mehresten, unbegrenzt, sondern ihrer Größe nach bestimmt, und wegen ihrer Wichtigkeit verdienen sie allerdings, daß wir bey dieser Gelegenheit ihre Betrachtung anfangen.

S. Was Catangenten sind, glaube ich sagen zu können.

L. Nun?

S. Es sind die Tangenten der Complemente.

L. Glauben Sie aber deswegen auch schon, daß Ihnen die Cotangenten bekannt sind? So lange Sie noch nicht wissen, was Tangenten sind, so lange hilft es Ihnen nicht, wenn Sie sich die Cotangenten als die Tangenten der Complemente gedenken. Denn überhaupt muß in einer Erklärung kein unbekanntes Wort vorkommen. So bald wir uns gemerkt haben werden, was unter den Tangenten der Winkel zu verstehen ist, so können wir auch Ihre Erklärung gebrauchen. Doch in der nächsten Unterredung mehr hiervon; denn ganz möchten wir mit der Betrachtung der Tangenten und Cotangenten heute nicht fertig werden, und doch wird es besser seyn, daß wir die ganze Betrachtung ununterbrochen anstellen, wenigstens so weit als sie uns jetzt möglich ist, denn auch von den Tangenten der Winkel bleibt uns für das künftige viel übrig.

Neuntes Gespräch.

L. Um Ihnen die Tangenten der Winkel kenntlich zu machen, werde ich wohl weiter nichts nöthig haben, zu sagen, als daß Fig. 66 KB eine Tangente des Winkels C sey, und zwar für den Halbmesser BC.

S. Also ist die Tangente eines Winkels ein Stück von einer Tangente des Kreises, dessen

dessen Mittelpunkt die Spitze des Winkels, und dessen Halbmesser einer seiner Schenkel ist, und zwar muß die gedachte Tangente des Kreises den Kreis in dem Endpunkte dieses Schenkels berühren.

L. Richtig ist das, was Sie gesagt haben, allerdings, aber etwas zu weitläuftig, und doch noch nicht vollständig genug. Denn es bleibt dabey doch noch immer die Frage übrig: Wie groß ist die Tangente eines Winkels. Daß sie ein Stück einer Tangente eines Kreises sey, das heißt weiter nichts, als daß sie eine gewisse bestimmte Größe habe, und das ist zu unbestimmt gesprochen, wenn Sie anders die Tangenten der Winkel erklären wollen.

S. Ist es recht, wenn ich dazu setze, das Stück der Tangente eines Kreises, welches zwischen die Schenkel des Winkels fällt?

L. Dieser Zusatz ist gut; allein ich wünschte nun, daß Sie die ganze Erklärung kürzer auszudrücken suchten, und dann auch, daß Sie darin nicht des Kreises, sondern bloß des Winkels gedächten. Sollten Sie das wohl im Stande seyn?

S. (Betrachtet eine Zeitlang die 66te Figur aufmerksam) Eine Tangente eines Winkels ist eine gerade Linie, die aus dem Endpunkte des einen Schenkels senkrecht auf demselben aufgerichtet, und so weit verlängert ist, bis der andere verlängerte Schenkel sie erreicht. Hier z. B. (Fig. 66) ist BK auf BC senkrecht aufgerich-

gerichtet und so weit verlängert bis er von KC geschnitten wird.

L. Für was für einen Halbmesser ist aber eine solche gerade Linie die Tangente?

S. Für den Halbmesser, welcher dem Schenkel des gegebenen Winkels gleich ist, aus dessen Endpunkte die Tangente senkrecht aufgerichtet worden.

L. Wenn man eine Tangente richtig beurtheilen will, so muß dabey eben so als bey der richtigen Beurtheilung der Sinus und Cosinus auf den Halbmesser, für welchen sie gezogen ist, gesehen werden. Thut man das nicht, so ist von keiner Tangente eines Winkels ein bestimmter Begriff möglich, und der große Nutzen, den man von diesen Linien hat, und welchen Sie in der Folge kennen lernen werden, würde ganz und gar wegfallen. Den Begriff einer Tangente eines Winkels nun vorausgesetzt, was kommt dabey weiter zu betrachten vor, vorausgesetzt, daß die Tangenten auf eben die Art betrachtet werden können und sollen, als die Sinus?

S. Die Vergleichung der Tangenten verschiedener Winkel.

L. Wie sind also und zwar, denn weiter gehen wir jetzt noch nicht, die Tangenten zweyer ungleichen spitzigen Winkel beschaffen?

S. Ungleich, und zwar ist die Tangente des größern Winkels größer als die Tangente des kleinern Winkels.

L. Wie

L. Wie wollen Sie das beweisen?

S. Ich will dazu nur erst eine Figur zeichnen. (Er zeichnet die 67te Figur.) Wenn DBA in dieser Figur auf AC senkrecht ist, so ist BA die Tangente des Winkels BCA, und DA die Tangente des Winkels DCA. Es ist aber

DA > BA. Denn da
ABC < R und
ABC + DBC = 2 R so muß
DBC > R und also auch
DC > BC seyn. Nun ist also
ferner DCq > BCq, und
DAq = DCq — ACq und
BAq = BCq — ACq. Da nun
DCq > BCq, so ist auch
DCq — ACq > BCq — ACq
oder DAq > BAq und
folglich DA > BA.

L. Wie verhalten sich also die Tangenten der spitzigen Winkel, wenn die Winkel wachsen oder abnehmen, und einerley Halbmesser behalten wird?

S. Die Tangenten wachsen, wenn die Winkel wachsen, und nehmen ab, wenn die Winkel abnehmen.

L. Hierin haben Sie also Aehnlichkeit mit den Sinus der Winkel. Wie groß ist aber wohl die Tangente eines rechten Winkels?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Das läßt sich gar nicht bestimmen. Denn wenn man für einen rechten Winkel z. B. ACB Fig. 68 die

Tangente ziehen wollte, so müßte man in A auf AC eine senkrechte Linie errichten, und diese sowohl als den andern Schenkel BC so weit verlängern, bis beyde sich schnitten. Allein DA und BC schneiden sich nicht, man mag sie so weit verlängern, als man will, weil sie parallele Linien sind, indem DAC = BCA = R und also DAC + BCA = 2R.

L. So groß Sie Sich also hier auch die Tangente gedenken mögen, so denken Sie dieselbe doch noch nicht groß genug. Dies druckt man in der Mathematik auf die Art aus, daß man sagt, die Tangente sey unendlich groß. Hiebey will ich zugleich bemerken, daß man, wenn man Tangente schreiben will, man solches durch den abgekürzten Ausdruck tang. thun und das unendlich Große bezeichnet man mit diesem Zeichen ∞. Also heißt tang. R = ∞?

S. Die Tangente eines rechten Winkels ist unendlich groß.

L. Mit den Tangenten der Winkel stehen ihre Secanten in genauer Verbindung. Man versteht darunter den Schenkel des Winkels, dessen Tangente man gezogen hat, welcher verlängert die Tangente begränzt. Eine Secante bezeichnet man durch Sec. So ist also Fig. 66. KC = Sec. KCA, und Fig. 67. BC = Sec. BCA und DC = Sec. DCA. Wie verhalten sich nun die Secanten zweyer verschiedener spitziger Winkel gegen einander?

S.

S. Die Secante des größern Winkels ist größer als die Secante des kleinern Winkels.

L. Und wenn also die Winkel ab oder zunehmen?

S. So nehmen auch ihre Secanten ab oder zu.

L. Und wie groß ist die Secante eines rechten Winkels?

S. Sec. R = ∞.

L. Nun Sie so weit die Tangenten und Secanten kennen, sind Sie nach dem, was Sie gestern von den Cotangenten sagten, gewiß im Stande, alle darüber hier nöthige Fragen zu beantworten. Man versteht nemlich unter einer Cotangente?

S. Die Tangente des Complements eines Winkels.

L. Wie verhalten sich also die Cotangenten zweyer verschiedenen spitzigen Winkel?

S. Die Cotangenten nehmen ab, wenn die Winkel zunehmen, und nehmen zu, wenn die Winkel abnehmen.

L. Auch die Cosecanten werden Ihnen nicht unbekannt seyn. Was verstehen Sie darunter?

S. Unter einer Cosecante verstehe ich die Secante des Complements eines Winkels.

L. Wie verhalten sich also die Cosecanten zweyer verschiedenen spitzigen Winkel?

S. Die Cosecanten nehmen zu, wenn die Winkel abnehmen, und werden kleiner, wenn die Winkel größer werden.

L. So viel setzt von den Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten, nur daß ich noch dazu setze, daß man eine Cotangente durch cot. und Cosecante auf diese Art bezeichnet, cosec. So heißt z. E. cosec. o < cosec. x.

S. Die Cosecante des Winkels o ist kleiner als die Cosecante des Winkels x.

L. Und wie müßten die Winkel o und x beschaffen seyn, wenn dies richtig seyn sollte?

S. Der Winkel o müßte größer seyn, als der Winkel x.

L. Nun betrachten Sie noch die 69te Figur, worin A C D = R, G A und B E auf A C, und B F und H D auf D C senkrecht sind. Was für Namen können Sie nun den darin vorkommenden Linien geben?

S. A C = B C = D C sind Halbmesser
B E = F C = sin. B C A = cos. B C D
E C = B F = cos. B C A = sin. B C D
G A = tang. B C A = cot. B C D
G C = sec. B C A = cosec. B C D
H D = cot. B C A = tang. B C D
H C = cosec. B C A = sec. B C D.

L. Gut. Noch eine Linie ist indeß hier übrig, welche Sie Sich bey der Gelegenheit ihrem Namen nach auch merken können. Es ist selbiges die Linie A E, oder der Unterschied zwischen

schen dem Halbmesser und Cosinus eines Winkels. Man nennt diese Linie den Quersinus des Winkels A C B und schreibt ihn sin. v. Wir werden bald Gelegenheit haben, von allen diesen Linien uns weitläuftiger zu unterreden, und dann werden sich Ihre jetzt davon erworbene Kenntnisse sehr erweitern. Jetzt nun wieder zu ein Paar Sätzen von den Tangenten der Kreise. Sie wissen bereits, wie man aus einem gegebenen Punkte in dem Umfange eines Kreises eine Tangente desselben zieht; allein es entsteht auch die Frage: Wie zieht man aus einem gegebenen Punkte ausserhalb eines Kreises eine Tangente desselben? In der 70ten Figur ist aus dem Punkte A die Tangente A B gezogen, welche, wie Sie sehen, eine Tangente des innern Kreises ist. Der äußere Kreis ist ein Hülfskreis, und die Linien A E und F E und D F sind Hülfslinien; der Winkel A D F = E D F = R.

S. (Nachdem er zuvor die 70te Figur sorgfältig betrachtet hat.) Man zieht also aus dem gegebenen Punkte nach dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises eine gerade Linie, und beschreibt damit aus dem eben genannten Mittelpunkte einen Kreis. Da wo die gezogene gerade Linie den Umfang des gegebenen Kreises, trifft, der innerhalb des andern liegt, errichtet man auf ihr bis an den Umfang des andern äussern Kreises eine senkrechte Linie, und von dem Punkte, in welchem dieselbe den Umfang

des äußern Kreises erreicht, zieht man endlich nach dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte beyder Kreise eine gerade Linie, und erhält so in dem Punkte, in welchem dadurch der innere Kreis geschnitten wird, den Berührungspunkt für die gedachte Tangente. In der 70ten Fig. z. B., wo aus A eine Tangente für den innern Kreis gezogen worden ist, hat man zuerst aus A die Linie AE gezogen, in D darauf eine senkrechte Linie aufgerichtet, und sie bis F verlängert. Ferner ist von F bis E eine gerade Linie gezogen, und dadurch hat man den Berührungspunkt B erhalten, so daß also AB die verlangte Tangente ist.

L. Ist AB wirklich eine Tangente des gegebenen Kreises?

S. Den Beweis hätte ich gewiß vergessen, wenn Sie mich nicht auf diese Art daran erinnert hätten. AB ist allerdings die verlangte Tangente. Um dieses zu beweisen, darf ich nur darthun, daß der Winkel EBA = R ist, und das ist leicht.
Es ist nemlich:

△ AEB = △ FDE. Denn es ist
AE = FE, als Durchmesser des äussern Kreises, und
EB = ED, als Durchmesser des innern Kreises, und
AEB = FED. Also
ist nun auch EBA = EDF und da

EDF

EDF = R, so ist auch EBA = R und folglich AB eine Tangente des gegebenen Kreises für den Punkt B.

L. Nach dem Kennzeichen einer Tangente eines Kreises, welches wir uns aus der ersten Beschreibung der Tangenten der Kreise hergeleitet haben, ist jede gerade Linie, die auf einem Halbmesser in dem Endpunkte senkrecht steht, eine Tangente. Um also zu wissen, ob eine gerade Linie eine Tangente sey oder nicht, zieht man durch den Punkt, worin sie den Kreis trifft, einen Halbmesser, und untersucht den Winkel, den sie mit demselben macht, und sieht, ob er ein rechter Winkel sey? Gesetzt nun, daß man schon wüßte, daß eine gerade Linie eine Tangente sey, und man aus dem Mittelpunkte des Kreises nach ihren Berührungspunkte eine gerade Linie zöge; was würde man dann behaupten können?

S. Daß dieser Halbmesser auf der Tangente, und die Tangente auf dem Halbmesser senkrecht stünde.

L. Wie so? Zeigen Sie mir dies doch an dieser (der 65ten) Figur.

S. Wenn CB nicht senkrecht auf HI wäre, so wäre eine andere aus C auf HI gezogene gerade Linie senkrecht darauf. Gesetzt, es sollte dies CK seyn, so daß CKB = R wäre, so müßte CBK < R und also CK < CB seyn. Da aber ein Stück von CK schon der

ganzen CB gleich ist, so kann ja die ganze CK nicht kleiner als CB seyn. Folglich kann auch weder CK noch irgend eine andere aus C nach HI gezogene gerade Linie außer CB senkrecht auf HI seyn.

L. Gesetzt ferner, daß eine gerade Linie eine Tangente eines Kreises, und aus ihrem Berührungspunkte eine senkrechte Linie auf derselben aufgerichtet ist, was nimmt dieselbe für einen Weg? Geht sie verlängert durch den Mittelpunkt oder nicht?

S. Ja, sie geht verlängert durch den Mittelpunkt. Denn thäte sie das nicht, so könnte man aus dem Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte eine gerade Linie ziehen, welche nach dem schon bewiesenen ebenfalls auf der Tangente in dem Berührungspunkte senkrecht wäre. Alsdann wären aus einem Punkte auf einer geraden Linie zwey senkrechte Linien aufgerichtet, und das ist unmöglich.

L. Daher wollen wir uns denn auch diese Sätze merken, damit wir nicht aus Uebereilung etwa einmal auf eine Unmöglichkeit fallen, und in unserer nächsten Unterredung die krummen Linien beym Kreise betrachten.

Zehntes

Zehntes Gespräch.

S. Also soll ich heute den Anfang machen, die krummen Linien zu untersuchen? Das ist für mich wieder etwas ganz neues; aber was werde ich denn dabey zu untersuchen haben?

L. Für jetzt wohl noch nichts weiter als was wir auch bey den geraden Linien untersucht haben, die Gleichheit nemlich und die Ungleichheit dieser Linien was statt finde, und zuvor, wenn sich ein Paar Kreise schneiden, oder einander berühren, denn davon haben wir ja bisher auch schon gesprochen, nur mit dem Unterschiede, daß die schneidenden und berührenden Linien gerade Linien waren.

S. Also wird wohl die erste Frage seyn: Was findet statt, wenn sich zwey Kreise schneiden?

L. Ganz recht; und die zweyte?

S. Was findet statt, wenn sich zwey Kreise berühren?

L. Aber es können sich Kreise auf eine doppelte Art berühren; entweder von innen, alsdann liegt der eine ganz innerhalb des andern: oder von außen, wo denn beyde ganz außer einander liegen.

S. Alsdann theilt sich diese Frage von neuem in zwey andere: Erstlich, was findet

statt, wenn sich zwey Kreise von innen berühren? und zweytens; Was findet statt, wenn sich zwey Kreise von aussen berühren?

L. Wie verhält sich es also erstlich mit zwey Kreisen, die einander schneiden? Ist es möglich, daß sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, oder ist solches unmöglich? Betrachten Sie diese Figur (die 71te).

S. Nein, es ist nicht möglich, daß dergleichen Kreise einerley Mittelpunkt haben. Denn wenn z. B. E Fig. 72 der Mittelpunkt wäre, und man zöge von E nach C, wo sich beyde Kreise schneiden, und nach irgend einem andern Punkte G, wo sie sich nicht schneiden, gerade linien, hier EC und EFG, so wäre EC der Halbmesser beyder Kreise, und dieser EC müßten nun alle Halbmesser so wohl des einen als des andern Kreises gleich seyn. Allein in der linie EFG ist EF der Halbmesser des einen und EFG der Halbmesser des andern Kreises. Wenn also zwey Kreise, die sich schneiden einerley Mittelpunkt haben sollten, so müßten beyde so wohl einerley als verschiedene Halbmesser haben können, und das ist unmöglich.

L. Aber Kreise, die sich von innen berühren, wie die beyden Fig. 73 können vielleicht einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben?

S. Auch diese nicht. Denn wenn in den beyden Kreisen Fig. 73 z. B. F (Fig 74) der gemeinschaftliche Mittelpunkt wäre, und man

zöge

zöge hier wieder zwey solche Linien von demsel=
ben, als vorhin Fig. 72 aus E gezogen wur=
den; so wäre F C ein gemeinschaftlicher Halb=
messer beyder Kreise, und dieser Linie müßten
also alle übrige Halbmesser beyder Kriese gleich
seyn. Allein in F E B ist F E der Halbmesser
des einen und F E B der Halbmesser des andern
Kreises, und beyde sind ungleich. Wenn al=
so zwey Kreise, die sich von innen berühren,
einerley Mittelpunkt haben könnten, so müß=
ten sie zu gleicher Zeit einerley und verschiede=
ne Halbmesser haben können, und das ist un=
möglich. Folglich haben auch die Kreise, die
sich von innen berühren keinen gemeinschaftli=
chen, sondern zwey verschiedene Mittelpunkte.

L. Da wir hier die Lage der Mittelpunk=
te zweyer Kreise betrachtet haben, so lassen
Sie uns doch auch einen Versuch machen, zu
sehen, ob wir nicht den Ort des Mittelpunkts
eines Kreises noch etwas genauer, als bisher
geschehen, bestimmen können. Das wissen
wir schon, daß der Mittelpunkt eines Kreises
von allen Punkten in dem Umfange desselben
gleich weit entfernt, und also alle von ihm nach
dem gedachten Umfange gezogene Linien gleich
seyn müssen. Allein Sie sehen auch leicht von
selbst, daß wenn wir nach diesem Kennzeichen
beurtheilen wollten, ob ein Punkt innerhalb
eines Kreises der Mittelpunkt sey oder nicht,
solches zu einer unendlichen Untersuchung füh=
ren würde, indem man sich in jedem Kreise

unendlich viele Halbmesser gedenken kann. Vielleicht ist es genug, daß wir von einer bestimmten Anzahl solcher Linien, die von einem Punkte in einem Kreise nach dem Umfange gezogen werden, wissen, daß sie gleich sind, um daraus sogleich schließen zu können, daß es der wahre Mittelpunkt sey. Was meinen Sie? Ist es genug, um einen Punkt in einem Kreise den Mittelpunkt desselben zu nennen, daß man von demselben nach dem Umfange zwey gleiche Linien ziehen kann?

S. Nein, denn von einem jeden Punkte in einem Kreise lassen sich eben so wie von einem jeden Punkte außerhalb desselben nach seinem Umfange zwey gleiche gerade Linien ziehen. Wir haben diesen Satz bey der Betrachtung der 56ten und 59ten Figur gehabt.

L. Also müssen von dem gedachten Punkte zum wenigsten drey gerade Linien nach dem Umfange gezogen werden können?

S. Ja.

L. Nur frägt sich noch, ob diese Anzahl groß genug sey? Betrachten Sie, um darüber gewiß zu werden, die 75te Figur. Ist es möglich, daß ein anderer Punkt als C der Mittelpunkt des daselbst beschriebenen Kreises sey, wenn AC = BC = DC? Könnte z. B. wohl E der Mittelpunkt seyn? Ich habe von E nach C, um Ihnen die Untersuchung zu erleichtern, eine gerade Linie EC gezogen, und sie nach beyden Seiten bis nach F und G in dem Umfange verlängert.

S.

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ich bin hier nicht im Stande zu urtheilen.

L. Wenn E der Mittelpunkt wäre, so wäre doch C ein anderer Punkt in dem Kreise?

S. Ja.

L. Und was wären alsdann die in der Figur befindlichen geraden linien für welche?

S. Nun sehe ich es wohl. EF und EG wären Halbmesser, und CA, CB und CD linien, die von einem Punkte in einem Kreise, der nicht der Mittelpunkt wäre, nach dem Umfange gezogen werden. Wäre dies, so wäre CA > CB und CB > CD, welches doch nicht seyn kann, da AC = CB = CD angenommen werden. Wenn also von einem Punkte in einem Kreise drey gleiche linien nach dem Umfange desselben gezogen werden können, so ist solches der Mittelpunkt.

L. Nun sind wir weit eher im Stande, einen Mittelpunkt eines Kreises zu beurtheilen, als vorhin, und vielleicht hilft uns die gefundene Bestimmung auch sonst noch. Wir betrachteten so eben die Lage der Mittelpunkte zweyer Kreise, die sich schneiden. So bald Kreise sich schneiden, so werden auch die Punkte merkwürdig, in welchen sie solches thun. Also die Frage. In wie viel Punkten können sich wohl zwey Kreise schneiden?

S. Die, welche wir Fig. 71. und 72 betrachtet haben, schnitten sich nur in zwey Punkten, und ich sehe auch nicht, wie es mög-

lich wäre, daß sich zwey Kreise in mehr als zwey Punkten schneiden sollten.

L. Das ist nicht genug, daß Sie nicht einsehen, wie es möglich ist; Sie müssen erst überzeugt seyn, daß es unmöglich ist, daß sich zwey Kreise in mehr als zwey Punkten schneiden, ehe Sie behaupten dürfen. Stellen Sie Sich einmal in Gedanken vor, denn eine Figur, die Ihnen dies erläuterte, kann man nicht gut beschreiben, daß zwey Kreise einander in drey Punkten schnitten, so hätten sie doch drey Punkte mit einander gemein, und von einem jeden dieser Punkte nach dem Mittelpunkte des einen Kreises Halbmesser gezogen, so hätte man drey gleiche gerade Linien, die von einem Punkte innerhalb beyder Kreise nach drey Punkten in dem Umfange beyder sich schneidenden Kreise gezogen wären. Was müßte denn dieser Punkt innerhalb beyder Kreise für ein Punkt seyn?

S Der Mittelpunkt von beyden Kreisen.

L. Ist das möglich?

S. Nein, denn wir haben bereits bewiesen, daß zwey Kreise, die sich schneiden, keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben können. Also ist es nun ausgemacht, daß zwey Kreise, die sich schneiden, einander in nicht mehr, als in zwey Punkten einander schneiden können.

L. Hier hat uns also die vorhergehende Bestimmung der Lage des Mittelpunkts eines

Kreises

Kreises sogleich gute Dienste gethan. Ueberhaupt hat man gewiß, ob man es gleich nicht immer zum voraus einsieht, früh oder spät, Vortheile zu genießen, wenn man sich das, was man einmal zu untersuchen angefangen hat, jedem Theile nach so deutlich als möglich zu machen sucht. — Jetzt haben wir von den Kreisen, die einander schneiden, eine neue Behauptung gelernt; vielleicht, daß wir dergleichen auch von den Kreisen, die sich berühren, finden können. Lassen Sie uns daher die Frage aufwerfen: In was für einer geraden Linie liegen die Mittelpunkte zweyer Kreise, die sich berühren?

S. Diese Frage muß aber erstlich von den Kreisen, die sich von innen, und dann von denen, welche sich von außen berühren, beantwortet werden; und es sind also eigentlich zwey Fragen. Aber wie soll man die gerade Linie bestimmen, in welcher beyde Mittelpunkte solcher Kreise liegen, die sich entweder von innen oder von außen berühren?

L. Betrachten Sie einmal die 76te Figur. Wenn C der Mittelpunkt des einen Kreises ist, so lassen sich alle Linien, die von demselben nach dem Umfange gezogen werden können, in zwey Classen theilen. Eine von ihnen geht durch den Berührungspunkt beyder Kreise, die übrigen aber insgesammt nicht.

S. Nun weiß ich, was ich suchen soll. Ich soll untersuchen, ob die gerade Linie,

welche durch die Mittelpunkte zweyer Kreise geht, die sich berühren, verlängert den Berührungspunkt treffe oder nicht. Ich will zuerst zwey Kreise nehmen, die sich von innen berühren, dergleichen die 76te Figur enthält. Wenn darin C der eine Mittelpunkt ist, so muß der andere entweder in der Linie CA, welche nach dem Berührungspunkte gezogen ist, oder in der andern Linie CB liegen.— Wie nun weiter?

L. Lassen Sie C den Mittelpunkt des grössern und K den Mittelpunkt des kleinern Kreises seyn; ziehen Sie die Linie AK, und betrachten Sie alles genau.

S. AC ist gleich CB weil beyde Halbmesser des grössern Kreises sind, und KA ist gleich KL, weil beyde Halbmesser des kleinern Kreises sind. Wird das wohl statt finden können? (Nach einigem Nachdenken.) Nein. Denn es ist

AK + KC ▷ AC, und da
AC = CB so ist auch
AK + KC ▷ CB, oder
AK + KC ▷ BK + KC. Hieraus

aber würde folgen daß

AK ▷ BK, und folglich noch mehr
AK ▷ KL seyn müßte, und das ist

unmöglich, weil nach der Voraussetzung KL = KA seyn muß, indem K als der Mittelpunkt des kleinern Kreises angenommen worden ist. Es liegen also in zwey Kreisen, die

sich

sich einander von innen berühren, die beyden Mittelpunkte derselben so, daß die gerade Linie, welche diese beyden Mittelpunkte verbindet, verlängert durch den Berührungspunkt geht.

L. Wie verhält es sich nun in ähnlicher Rücksicht mit den Mittelpunkten zweyer Kreise, die sich von aussen berühren. Betrachten Sie die 78te Figur. Können darin wohl F und G die Mittelpunkte seyn, deren Verbindungslinie nicht durch den Berührungspunkt beyder Kreise geht? Ich habe darin zur schnellen Uebersicht Ihnen sogleich die Hülfslinie F A und G A, welche in dem Berührungspunkte zusammen kommen, gezogen.

S. (Nach einigem Nachdenken.) Nein. Denn in dem Dreyecke A F G ist

F A + A G > F G und folglich

noch mehr F A + A G > F C + D G, denn es

ist F C + D G < F G um C D. Wenn

aber F und G die Mittelpunkte der sich hier berührenden Kreise sind, so muß

F A = F C und

A G = D G und also

F A + A G = F C + D G seyn.

Es ist also auch hier unmöglich, daß die gerade linie, welche die Mittelpunkte der beyden Kreise, die sich berühren, verbindet, durch einen andern als durch den Berührungspunkt gehe, und also kann man ganz allgemein behaupten, daß die gerade linien, welche die beyden

den Mittelpunkte zweyer sich berührender Kreise verbindet, verlängert durch den Berührungspunkt beyder Kreyse gehen.

L. Und eben darum, weil man diese Behauptung allgemein behaupten kann, habe ich vorhin allgemein gefragt, aber recht thaten Sie daran, daß Sie die Untersuchung theilweise für jeden einzeln Fall anstellen wollten, denn anders konnten Sie nicht zur Gewißheit kommen. Aus dem bisherigen werden Sie nun wohl im Stande seyn, mir die Frage zu beantworten, wie man es mache, um zwey Kreise zu beschreiben, die sich entweder von innen, oder von außen berühren?

S. Man beschreibt zuerst einen Kreis, und zieht von dem Mittelpunkte desselben nach dem Punkte seines Umfangs, worin ihn ein anderer Kreis berühren soll, eine gerade linie. In dieser nimmt man darauf den Mittelpunkt des andern Kreises so an, daß von ihm bis zu dem gedachten Berührungspunkte die Entfernung des Halbmessers dieses andern Kreises ist, und beschreibt daraus diesen andern Kreis. Gesetzt z. B. es sollten mit dem Halbmesser A B und C D Fig. 79 zwey Kreise beschrieben werden, die sich berührten, so beschreibt man zuerst Fig. 80 und 81 mit K D = A B den daselbst befindlichen größern Kreis. Nun zieht man, wenn D der Berührungspunkt seyn sollte, den Halbmesser K D, und sollen sich die Kreise von außen berühren, so verlängert man

diese

diese KD wie Fig. 81 bis in C, so daß DC Fig. 81 = CD Fig. 79 ist; wenn sie sich aber von innen berühren sollen, so nimmt man, wie Fig. 80 CD = CD Fig. 79. Aus C beschreibt man endlich mit dem Halbmesser CD einen Kreis, und erhälte auf diese Art, was man verlangt.

L. In wie viel Punkten berühren sich denn wohl zwey Kreise, sie mögen sich nun von innen oder von außen berühren?

S. In nicht mehr als einem Punkte. Denn wenn man durch die beyden Mittelpunkte desselben eine gerade Linie zieht und dieselbe verlängert, so geht sie durch den Berührungspunkt. Sollte es nun mehr als einen Berührungspunkt geben können, so müßte diese gerade Linie durch beyde gehen, und dann könnte man entweder zwey gerade Linien durch ein und dieselben zwey Punkte legen, welches unmöglich ist; oder es müßten die beyden Berührungspunkte mit beyden Mittelpunkten in einer geraden Linie liegen, und dann müßte ein Kreis zwey verschiedene Durchmesser haben können, welches eben so unmöglich ist.

L. Nun können wir fürs erste die Betrachtung der Linien, die bey einem Kreise vorkommen, beschließen, und uns zu den Winkeln wenden, und das soll denn in unserer nächsten Unterredung geschehen.

Eilftes Gespräch.

L. Wir fangen also heute die Betrachtung der Winkel, die in einem Kreise vor andern sich auszeichnen an, und was sind das vorzüglich für welche?

S. Die Winkel am Mittelpunkte und die Winkel am Umfange, ferner die Winkel, welche eine Tangente mit einer Sehne macht, und die Winkel, welche von einem Bogen und einer Tangente oder von einem Bogen einer Sehne gemacht werden.

L. Es giebt hier also eine beträchtliche Anzahl von Gegenständen zu untersuchen. Wir wollen von den Winkeln am Mittelpunkte und den Winkeln am Umfange anfangen. Wie vielerley Vergleichungen meinen Sie, daß daselbst angestellt werden können?

S. Dreyerley. Man kann die Winkel am Mittelpunkte unter sich vergleichen, dann dasselbe mit den Winkeln am Umfange thun, und endlich Winkel am Mittelpunkte gegen Winkel am Umfange halten.

L. Aber die Winkel, welche man betrachten will, müssen vor der Vergleichung erst einzeln deutlich gedacht werden. Worauf sieht man alsdann bey den Winkeln am Mittelpunkte, und am Umfange? Nehmen Sie die Win-

Winkel am Mittelpunkte und am Umfange z. B. die Ihnen die 45te Figur zeigt, und sagen Sie mir, wie Sie erstlich den Winkel am Mittelpunkte nennen?

S. Den Winkel BCA.

L. Und wie nennen Sie den eben daselbst befindlichen Winkel am Umfange?

S. Den Winkel BDG.

L. Wo enden sich die Schenkel beyder Winkel?

S. Im Umfange.

L. Ist das schlechterdings nothwendig?

S. Nein, denn die Winkel bleiben dieselben, wenn man gleich ihre Schenkel kleiner oder größer machte.

L. Indeß kann man jedesmal bey den Winkeln am Mittelpunkte und an dem Umfange die Schenkel derselben in dem Umfange sich endigen lassen, und dann sagt man, daß die Schenkel derselben auf dem Bogen des Kreises ruhen, der zwischen ihren Schenkeln liegt. So ruhen die Schenkel des Winkels BCA Fig. 45?

S. Auf dem Bogen BA.

L. Und die Schenkel des Winkels BDG?

S. Auf dem Bogen BAG.

L. Kann man nun dadurch, daß man anzeigt, auf was für einen Bogen die Schenkel eines Winkels am Mittelpunkte oder am Umfange beruhen, nicht diese Winkel selbst bezeichnen?

S. Ja, dies kann ein Kennzeichen derselben abgeben.

L. Und wenn man es thut, so erhält man dadurch zugleich das, daß Bogen mit Winkeln in Verbindung gesetzt werden, und diese Verbindung kann vielleicht ein Mittel werden, die Bogen eines Kreises leicht zu vergleichen, wenn man zuvor die Winkel am Mittelpunkte entweder oder am Umfange, deren Schenkel auf ihnen ruhen, untersucht hat. Wir wollen nun jetzt die Winkel am Mittelpunkte und am Umfange, und zwar so wohl jede Art unter sich, als beyde Arten unter einander vergleichen. Dinge, die verglichen werden sollen, müssen etwas mit einander gemein haben, denn sonst findet keine Vergleichung statt. Was würde also bey den genannten Winkeln, wenn sie sollen verglichen werden können, statt finden müssen.

S. Daß ihre Schenkel auf einerley Bogen ruhen.

L. Wie ist es also zuvörderst mit den Winkeln am Mittelpunkte, deren Schenkel auf einerley oder vielmehr auf gleichen Bogen eines Kreises ruhen?

S. Diese sind einander gleich, dies habe ich schon im Anfange der Betrachtung des Kreises bewiesen, als wir die 50te Figur gebrauchten.

L. Also wollen wir uns jetzt nicht weiter dabey aufhalten, sondern sogleich zu den Winkeln

keln am Umfange fortgehen. Wie sind also zwey Winkel am Umfange eines Kreises, wenn ihre Schenkel auf gleichen Bogen ruhen, beschaffen? Nehmen Sie die beyden Winkel BAC und BDC Fig. 82 zum Beyspiele!

S. (Nach einigem Nachdenken.) Darüber bin ich nicht im Stande zu urtheilen; denn alles, was ich bisher gelernt habe, hilft mir, soweit ich mich daran erinnern kann, nichts.

L. Wir wollen also zu der Vergleichung der Winkel am Mittelpunkte mit den Winkeln am Umfange fortgehen, vorausgesetzt, daß beyder Schenkel auf einerley Bogen ruhen. Fig. 83 ist ein Winkel am Mittelpunkte, ACB nemlich, gezeichnet. Zeichnen Sie Sich dazu einen Winkel am Umfange, der mit diesem Winkel am Mittelpunkte auf einerley Bogen ruhe.

S. Da darf ich nur den einen Schenkel BC bis in D verlängern und DA ziehen, wie hier. (Er zeichnet jetzt die 84te Figur.)

L. Wie groß ist nun ACB gegen ADB gehalten?

S. ACB ist größer als ADB, denn ACB ist ein äußerer Winkel von dem Dreyecke ACD, in welchem DC verlängert ist, und ADB einer von den innern gegenüber stehenden Winkeln.

L. Sie urtheilen hier allerdings wahr, allein sie wenden den allerersten von den Sätzen an, welche wir bey der Betrachtung des äu-

ßern Winkels eines Dreyecks, worin eine Seite verlängert worden, gehabt haben, und dadurch wird Ihre Behauptung nicht genau und bestimmt genug. Sollten Sie nicht noch anders die vorgelegte Frage beantworten könne?

S. ACB ist so groß als ADB und DAC zusammen genommen, weil in jedem Dreyecke, worin eine Seite verlängert worden, der äußere Winkel so groß ist, als beyde innere gegenüber stehende zusammen genommen.

L. So ist Ihre Antwort schon befriedigender. Allein, was ist denn das Dreyeck ACD für eins?

S. Ein gleichschenkliges Dreyeck, — und folglich ist ADC = DAC und ADC + DAC = 2ADC; und da ACB = ADC + DAC ist, so ist also auch ACB = 2ADC, oder der Winkel am Mittelpunkte ist noch einmal so groß als der Winkel am Umfange, wenn beyder Schenkel auf einerley Bogen ruhen.

L. Haben Sie das schon so ganz allgemein bewiesen, als Sie es ausdrücken? Was haben die Schenkel des Winkels ADC am Umfange mit den Schenkeln des Winkels ACB am Mittelpunkte in der 84ten Figur für eine lage?

S. (Nach aufmerksamer Betrachtung der Figur) Der eine Schenkel des Winkels am Mittelpunkte liegt in dem einen Schenkel des Winkels am Umfange.

L. Ist das allezeit so?

S.

S. Nein, das ist gerade nicht nothwendig.

L. Also müssen Sie fürs erste auch hierauf mit sehen, und nun drücken Sie Ihre Behauptung noch einmal aus.

S. Der Winkel am Mittelpunkte in einem Kreise ist doppelt so groß als der Winkel am Umfange desselben, wenn beyder Schenkel auf einerley Bogen ruhen, und der eine Schenkel des Winkels am Mittelpunkte ganz auf dem einen Schenkel des Winkels am Umfange liegt.

L. So liegen nun die Schenkel der Winkel am Mittelpunkte und am Umfange nicht immer, sondern bisweilen auf eine andere Art. Denken Sie darüber nach, und zeichnen Sie Sich, wenn Sie es für nöthig finden, Figuren.

S. (Der Schüler zeichnet sich die 85te und 86te Figur.) Hier habe ich zwey andere lagen.

L. Suchen Sie dieselben mit Worten zu beschreiben.

S. In der 85ten Figur liegen die Schenkel des Winkels am Mittelpunkte ganz zwischen den Schenkeln des Winkels am Umfange, und in der 86ten schneidet der eine Schenkel des Winkels am Mittelpunkte den einen Schenkel des Winkels am Umfange.

L. Dies sind nun auch alle die lagen, welche die Schenkel der Winkel am Umfange und am Mittelpunkte, wenn sie auf einerley Bogen ruhen, haben können. Im ersten Falle

wissen wir nun schon, daß der Winkel am Mittelpunkte noch einmal oder doppelt so groß ist, als der Mittelpunkt am Umfange, und da wir sonst schon oft gesehen haben, daß eine veränderte Lage der Dinge, welche man untersucht, nichts in den davon zu behauptenden Sätzen ändere, so können wir allerdings vermuthen, daß auch in den beyden übrigen Fällen der Winkel am Mittelpunkte doppelt so groß als der Winkel am Umfange seyn werde. Allein untersuchen müssen wir doch, ehe wir behaupten, denn dazu ist nöthig, daß unsere Vermuthung zur Gewißheit erhoben werde. Sollten Sie nicht im Stande seyn, fürs erste den 2ten Fall auf den ersten zu bringen?

S. Dazu müßte ich wenigstens eine Hülfslinie ziehen.

L. Das steht Ihnen frey.

S. (Nach einigem Nachdenken zieht er die Linie DE Fig. 87.) Nun sieht man es bald. Denn nach dem ebenen bewiesenen Satze ist

$$ACE = 2ADE, \text{ und}$$
$$ECB = 2EDB, \text{ und also}$$
$$ACE + ECB = 2ADE + 2EDB \text{ oder}$$
$$ACB = 2ADB.$$

L. Wie aber in dem Falle, den die 86te Figur enthält?

S. (Zieht Fig. 88 wieder die Linie DE.) Da ist es eben so. Denn Fig. 88 ist

$$ECB = 2EDB \text{ und}$$
$$ECA = 2EDA, \text{ also}$$

ECB

ECB — ECA = 2EDB — 2EDA, oder ACB = 2ADB, denn es ist 2EDB = 2EDA + 2ADB.

L. Nun können wir also allerdings mit Gewißheit behaupten, daß der Winkel am Mittelpunkte jedesmal doppelt so groß sey, als der Winkel am Umfange, wenn beyder Schenkel auf einerley Bogen ruhen, und — —

S. Weiter ist nichts dazu zu setzen.

L. Die Bogen, worauf in den betrachteten Fällen die Winkel am Mittelpunkte und am Umfange ruhen, sind kleiner als ein halber Kreis, und das dürfen wir, ohne zu springen, nicht aus der Acht lassen.

S. Daran hätte ich nicht gedacht.

L. Und wenn Sie nicht darauf geführt wären, so hätte es Ihnen in der Folge unvermuthet Schwierigkeiten machen können. Also merken Sie Sich auch diese Bedingung. Und nun zu der Vergleichung der Winkel am Umfange unter sich. Giebt es deren, wenn wir auf die Bogen sehen, worauf ihre Schenkel ruhen, nur eine, oder mehrere Arten?

S. Wenn man darauf sieht, auf was für einen Bogen ihre Schenkel ruhen, so giebt es drey Arten derselben. Denn entweder ist dieser Bogen kleiner als ein halber Kreis, oder er ist einem halben Kreise gleich, oder er ist größer als derselbe.

L. Wie sind also erstlich zwey Winkel am Umfange beschaffen, deren Schenkel auf einerley Bogen ruhen, wenn dieser Bogen kleiner

ist, als ein halber Kreis? Betrachten Sie die 89te Figur, und darin die Winkel BAD und BED.

S. Ich sehe noch nicht, wie ich diese beyde Winkel mit einander vergleichen könne.

L. So nehmen Sie den Winkel BCD Fig. 90 am Mittelpunkte, dessen Schenkel mit dem Schenkel der gedachten Winkel am Umfange auf einerley Bogen ruhen, zu Hülfe.

E. Nun läßt sich leicht zeigen, daß

BAD = BED. Denn es

ist BAD = $\frac{1}{2}$ BCD und

auch BED = $\frac{1}{2}$ BCD, und

also BAD = BED.

L. Drücken Sie dies mit Worten aus.

S. Wenn Winkel am Umfange mit ihren Schenkeln auf einerley Bogen ruhen, der kleiner ist, als ein halber Kreis, so sind sie einander gleich, weil ein jeder die Hälfte des Winkels am Mittelpunkte ist, dessen Schenkel auf eben dem Bogen stehen.

L. Wie nun, wenn zwey Winkel am Umfange mit ihren Schenkeln nicht auf einerley, sondern auf gleichen Bogen ruhten?

S. Dann wären sie ebenfalls gleich, weil dann die Winkel am Mittelpunkte, die zu diesen Bogen gehörten, gleich, und von diesen gleichen Winkeln die gedachten Winkel am Umfange die Hälften wären.

L. Nun die Frage: Wie groß ist ein Winkel am Umfange, wenn seine Schenkel auf einem halben Kreise ruhen? S.

S. Läßt sich darauf denn so bestimmt antworten?

L. Betrachten Sie, um Sich davon zu überzeugen, die 91te Figur, und darin den Winkel ADB. Aus was für Winkeln besteht derselbe?

S. Aus den Winkeln ADE und EDB.

L. Und wie groß sind diese?

S. ADE ist $\frac{1}{2}$ ACE und EDB $=$ $\frac{1}{2}$ ECB.

L. Und ADB also?

S. ADB ist gleich $\frac{1}{2}$ ACE $+$ $\frac{1}{2}$ ECB.

L. Wie groß sind aber ACE und ECB zusammen genommen?

S. So groß als zwey rechte Winkel, weil sie Nebenwinkel sind.

L. Und ADB also?

S. So groß als Ein rechter Winkel.

L. Und da alle rechte Winkel einander gleich sind, so werden auch alle Winkel am Umfange, deren Schenkel auf einem halben Kreise ruhen?

S. Einander gleich seyn, weil ein jeder von ihnen einem rechten Winkel gleich ist.

L. Nun sind also nur noch die Winkel am Umfange übrig, deren Schenkel auf einem Bogen ruhen, der größer ist, als ein halber Kreis. Figur 92 enthält dergleichen in den Winkeln BAE und BDE. Sind auch diese gleich?

S. Wenn ich mir nur hier eben so, als vorhin helfen könnte! allein hier kann ich keinen Winkel am Mittelpunkte machen.

L. Es wird solches auch nicht nöthig seyn. Wenn Sie die Linie A D ziehen, so machen Sie die Winkel, welche Sie untersuchen sollen, zu Winkeln in Dreyecken, und vielleicht sind Sie auf diese Art im Stande ihre Absicht zu erreichen.

S. (Nachdem er die 93te Figur gezeichnet, und sorgfältig betrachtet hat.) In den beyden Dreyecken B A F und D F E sind zwey Winkel gleich, nemlich B F A = D F E als Verticalwinkel, und A B D = D E A als Winkel am Umfange, deren Schenkel auf dem Bogen A D ruhen, der kleiner ist, als ein halber Kreis. Wenn ich nun nur noch von einer Seite wüßte, daß sie in beyden Dreyecken gleich wäre!

L. Ist das hier nöthig?

S. Sonst kann ich ja nicht behaupten, daß die ganzen Dreyecke gleich sind.

L. Und wozu wollten Sie das?

S. Um daraus zu schließen, daß die Winkel B A F und F D E einander gleich sind.

L. Wenn Sie weiter nichts daraus schließen wollen, so sagen Sie mir doch, wenn in zweyen Dreyecken ein Winkel gleich ist? aber so, daß Sie dabey keine Seite in Anschlag bringen.

S. Wenn darin die beyden übrigen Winkel gleich sind.

L. Und warum das?

S. Weil der dritte Winkel in einem jeden Dreyecke so groß ist, als zwey rechte Winkel weniger die beyden andern.

L. Und also?

S. Daß man doch so leicht etwas vergißt. Ich habe gar nicht nöthig zu beweisen, daß die beyden Dreyecke BAF und FDE gleich sind, um darzuthun, daß auch der Winkel BAF gleich dem Winkel FDE sey, sondern nur zu zeigen, daß ABF = AED und BFA = DFE, denn daraus folgt schon, daß BAE = BDE, weil sie die dritten Winkel in zwey Dreyecken sind, welche die übrigen Winkel gleich haben.

L. Also sind nun auch die Winkel am Umfange, deren Schenkel auf einerley obgleich größern Bogen als ein halber Kreis ist, ruhen?

S. Alle einander gleich.

L. Und also nun überhaupt die Winkel am Umfange, wenn ihre verlängerte Schenkel auf einerley Bogen ruhen?

S. Einander gleich.

L. Die Winkel am Umfange haben nun auch noch einen andern Namen, indem sie auch Winkel im Abschnitte genannt werden. Sie heissen aber Winkel in dem Abschnitte der von der Sehne zwischen ihren Schenkeln, und dem Bogen gemacht wird, welcher von dem ganzen Umfange nach Abzug des Bogens, worauf ihre Schenkel ruhen, übrig bleibt. Fig. 94 z. B. ist

BAC

BAC ein Winkel im Abschnitte BAEC
ABC ein Winkel im Abschnitte ABC, und
ACB ein Winkel im Abschnitte AECB.
Dies vorausgesetzt, was können Sie von den Winkeln in einerley Abschnitten behaupten?

S. Daß sie alle unter einander gleich sind.

L. Wie verhalten sich aber zwey Winkel am Umfange, die in einem Kreise in zwey ungleichen Abschnitten liegen?

S. Sie sind auch ungleich, und zwar ist der Winkel in dem größern Abschnitte größer als der Winkel in dem kleinern Abschnitte.

L. Sind Sie dessen so gewiß, daß Sie ohne alle Zurückhaltung und allgemein dies behaupten?

S. (Denkt nach) Mich dünkt, daß ich es kann.

L. Zu was für einem Abschnitte gehört der Winkel BAC Fig. 95?

S. Zu dem Abschnitte BAC.

L. Und der Winkel DAE?

S. Zu dem Abschnitte DBACE.

L. Welcher Abschnitt ist der größere?

S. Der Abschnitt DBACE.

L. Und welcher Winkel ist der größere?

S. Der Winkel BAC.

L. Also folgt?

S. Daß ein Winkel in zwey Abschnitten die größer sind, als ein halber Kreis, derjenige, der größere sey, der zu dem kleinern, und der der kleinere, der zu dem größern Abschnitte gehört.

L. Wie

L. Wie ist es mit den Winkeln in Abschnitten beschaffen, die kleiner sind, als ein halber Kreis?

S. Sie sind ebenfalls größer, wenn der Abschnitt kleiner, und kleiner, wenn der Abschnitt größer ist.

L. Nun noch eine Frage, die Winkel in einem Kreise betreffend. Betrachten Sie die 96te Figur. ADCB ist daselbst ein Viereck, dessen Winkelspitzen insgesammt in dem Umfange eines Kreises liegen. Wie groß sind darin jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen? Ziehen Sie wie Fig. 97. die Hülfslinie AC und DB.

S. So groß als zwey rechte. Denn es ist

$$CBD = BAC \text{ und } BDA = ACB;$$

folglich

$$ADC = BAC + ACB \text{ und}$$

$$ADC + ABC = BAC + ACB +$$

$$ABC = 2R.$$

Auf eben die Art beweiset man auch, daß $DAB + DCB = 2R.$

L. Hiermit wollen wir fürs erste die Betrachtung der Winkel im Kreise beschließen, und in unserer nächsten Unterredung zu den Abschnitten fortgehen.

Zwölftes Gespräch.

1. Wir haben bisher unter andern auch von den Winkeln im Abschnitte gesprochen, und dieselben verschiedenen ihrer Eigenschaften nach kennen gelernt. Wenn nun zwey oder mehrere Abschnitte einerley Winkel fassen, so nennt man sie ähnliche Abschnitte, und dies vorausgesetzt, so können wir nunmehr die Aehnlichkeit der Kreisabschnitte untersuchen, indem die Frage: Sind zwey Abschnitte einander ähnlich oder nicht? eigentlich doch nichts anders heißt, als: Fassen diese Abschnitte einerley Winkel oder nicht. Können nun wohl auf einer geraden Linie und nach einer Seite derselben zwey Abschnitte, die ähnlich und ungleich sind, gelegt werden? Ueber AB z. B. Fig. 98 liegen die beyden Abschnitte ADB und ACB, welche offenbar ungleich sind, indem der eine ein Theil des andern ist. Wäre es bey diesen Umständen wohl möglich, daß sie einander ähnlich wären, oder einerley Winkel faßten?

S. Wenn das beurtheilt werden soll, so müssen in der Figur zuvor Winkel im Abschnitte gemacht werden, und zwar so, daß man beyde hier nöthige mit einander zu vergleichen im Stande ist. Ich will also erst den Winkel

ADB

ADB machen, AD bis C verlängern, und CB ziehen. Wenn das geschehen ist, so fällt sogleich in die Augen, daß diese Abschnitte unähnlich sind. Denn der Winkel ADB des kleinern Abschnitts ist größer als der Winkel ACB des größern Abschnitts, weil ADB der äußere und ACB der innere gegenüber stehender Winkel des Dreyecks DCB ist, worin die Seite DC verlängert worden.

L. Wie sind also ähnliche Abschnitte, oder Abschnitte die einerley Winkel fassen, wenn sie über gleichen geraden Linien liegen, beschaffen?

S. Einander gleich; denn wenn sie über gleichen geraden Linien liegen, so kann man sie so auf einander legen, daß diese gleichen geraden linien zusammen fallen. Ist dies geschehen, so müssen die Abschnitte gleich seyn, weil sie ähnlich sind, oder einerley Winkel fassen. Denn wären sie nicht gleich, so könnten ja über einer geraden Linie zwey Abschnitte gelegt werden, welche ungleich und doch einander ähnlich wären, und davon haben wir so eben gehabt, daß es unmöglich ist.

L. Fig. 100 ist ein Abschnitt gezeichnet. Versuchen Sie den Kreis von welchem er ein Abschnitt ist, zu ergänzen.

S. Dann muß ich vor allen Dingen den Mittelpunkt suchen. Ich theile also die Sehne AC in zwey gleich Theile und ziehe durch den Theilungspunkt eine gerade Linie, welche auf AC senkrecht ist. In der 101ten Fig. z. B.

ist

ist AC in D in zwey gleiche Theile getheilt, und ED darauf senkrecht errichtet worden. In ED muß nun der Mittelpunkt liegen; allein wo? — Hier komme ich mit der ersten Art, den Mittelpunkt eines Kreises zu finden nicht aus, und ich will es daher auf die andere Art versuchen. Ich ziehe also, wie in Fig. 102 ausser AC noch eine Sehne z. B. AE, theile auch diese in H in zwey gleiche Theile, errichte aus dem Theilungspunkte die senkrechte Linie FH und verlängere sie, bis sie die senkrechte Linie ED in dem Punkte G trifft.

L. Dies ist allerdings ein richtiger und ganz allgemeiner Weg; indeß giebt es außer ihm noch einen andern, den wir ebenfalls betrachten wollen. Man theilt dabey die Sehne des Abschnitts wie AC Fig. 103 ebenfalls in zwey gleiche Theile und errichtet aus dem Theilungspunkte auch eine senkrechte Linie DE, welche man nach Gefallen verlängert. Dann zieht man die Sehne AD, und legt an diese Sehne in A den Winkel DAF = ADF, und verlängert AF bis sie die verlängerte DE erreicht. Da wo beyde Linien sich schneiden, ist alsdann der Mittelpunkt. Hier lassen sich aber drey Fälle unterscheiden. Entweder ist der Abschnitt kleiner als ein halber Kreis, oder einen halben Kreise gleich, oder größer als derselbe. Im zweyten Falle darf man nur die Sehne des Abschnitts, welcher ein Durchmesser ist, in zwey gleiche Theile theilen, um den

Mit-

Mittelpunkt zu erhalten, und es bedarf hier keines weitern Beweises, daß man auf diese Art den Mittelpunkt erhalte. In den beyden übrigen Fällen ist das Verfahren, den Mittelpunkt zu finden, einerley, und so als es vorhin beschrieben worden; allein der Beweis ist einigermaßen unterschieden, und darum muß also ein jeder gleichwohl besonders etrachbtet werden. Fig. 103 stellt nun die eben erwehnte Art den Mittelpunkt des Kreises, zu welchem ein gegebener Abschnitt gehört, zu finden vor, wenn dieser Abschnitt kleiner als ein halber Kreis ist. Fig. 104 thut eben das für den Fall, wenn der Abschnitt größer als ein halber Kreis ist. Wie wollen Sie aber in beyden Fällen wohl beweisen, daß F der Mittelpunkt sey?

S. Ich muß zu zeigen suchen, daß F von drey Punkten in dem Umfange gleich weit abstehe, und dazu von F nach B noch eine gerade Linie ziehen.

L. Versuchen Sie den Beweis zu führen.

S. (Nachdem er die 105te und 106te Figur beschrieben.) Es ist erstlich Fig. 105 F der Mittelpunkt, indem

AF = DF = FB. Denn es ist

AF = DF, weil

ADF = DAF, und ferner

AF = FB, weil

△ AEF = △ EFB, indem

AE = EB

EF = EF und

AEF = FEB = R. Weil also
AF = DF und auch
AF = FB, so muß auch
AF = DF = FB, und also F der verlangte Mittelpunkt seyn. Ferner ist auch zweytens Fig. 106 F der Mittelpunkt, weil AF = DF = FB. Es ist aber
AF = DF = FB, weil
AF = DF, indem
ADF = DAF. Ferner ist
AF = FB, weil
△AFE = △EFB, indem
AE = EB
EF = EF und
AEF = FEB = R. Weil also
AF = DF und
AF = FB, so muß auch
AF = DF = FB und also F der gesuchte Mittelpunkt seyn.

L. Sie haben diese Beweise ganz richtig geführt, und nun werden Sie wohl einsehen, in wiefern ich vorhin behauptete, daß diese beyde Beweise einigermassen verschieden wären. Wesentlich ist dieser Unterschied auf keine Art und Weise, sondern beyde kommen in der Hauptsache überein; allein gut ist es gleichwohl, daß man jeden besonders und deutlich sich gedacht habe, weil öfters die außerwesentlichen Verschiedenheiten eben so die schnelle Einsicht verhindern, als die wesentlichen, so lange nemlich, als man sie nicht als außerwesentliche

Ver-

schiedenheiten erkennet. Auch giebt es hier noch einen andern Gesichtspunkt, welchen mit wenigen zu berühren nicht undienlich seyn wird. Es kann die Art den Mittelpunkt des Kreises eines gegebenen Abschnitts zu finden auch allgemein so angegeben werden. Man theile die Sehne des gegebenen Abschnitts in zwey gleiche Theile, errichte aus dem Theilungspunkte eine senkrechte Linie, ziehe aus dem Punkte, wo sie den Bogen des Abschnitts trifft, nach dem einen Endpunkte der Sehne des Abschnitts eine gerade Linie, und lege an dieselbe und zwar bey dem eben gedachten Endpunkte einen Winkel, welcher dem Winkel zwischen dieser geraden Linie und der vorhin erwähnten senkrechten Linie gleich ist, und verlängere endlich die zuerst gezogene senkrechte Linie und den einen Schenkel des angelegten Winkels bis sich beyde schneiden, so ist der Schneidungspunkt dieser Linien der gesuchte Mittelpunkt. An der 105ten und 106ten Figur werden Sie Sich dies alles leicht deutlich vorstellen können. Nun kann man sich folgende drey Fälle gedenken. Der gedachte Schneidungspunkt fällt entweder außerhalb des gegebenen Abschnitts, oder in den Theilungspunkt der Sehne, oder endlich in den gegebenen Abschnitt. Der erste Fall ist bey Fig 105, der andere bey Fig. 107 und der dritte bey Fig 106. Im ersten Falle ist der Abschnitt kleiner als ein halber Kreis, im andern einem halben Kreise gleich, und im

dritten größer als ein halber Kreis. Dieser Gang unterscheidet sich also von dem vorhin genommenen vorzüglich dadurch, daß man die drey Fälle, die hier entstehen, auf eine andere Art als vorhin vestsetzt, sonst aber findet keine Verschiedenheit statt. — Nun betrachten Sie die 108te Figur. Die beyden daselbst beschriebenen Kreise ABGC und DEHF sind einander gleich, weil sie mit einerley Halbmessern beschrieben worden sind, und die Winkel G und H am Mittelpunkte ruhen, wie solches auch von selbst in die Augen fällt, mit den Winkeln A und D am Umfange auf gleichen Bogen. Angenommen nun, daß entweder G = H, oder A = D; wie werden dann die Bogen BKC und ELF, gegene inander gehalten, beschaffen seyn?

S. Gleich. Denn wenn G = H, so kann man, da GB = GC = HE = HF, die beyden Ausschnitte BGCK und EHFL so auf einander legen, daß sie sich decken, und dann deckt der Bogen ELF den Bogen BKC und beyde sind also einander gleich. Ist nun ausgemacht, daß gleiche Winkel am Mittelpunkte in gleichen Kreisen auf gleichen Bogen stehen, so läßt sich solches auch leicht von gleichen Winkeln am Umkreise zeigen. Denn wenn in zwey gleichen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich sind, so sind die Winkel am Mittelpunkte, die mit ihnen auf denselben Bogen ruhen ebenfalls gleich. Ist z. B. Fig.

108 A = D, so ist auch G = H, weil G = 2 A und H = 2 D ist. Da nun die Bogen BKC und ELF auf welchen G und H ruhen, gleich sind, so müssen auch die Bogen, auf welchen A und D ruhen, da es dieselben sind, gleich seyn.

L. Also hätten wir hier — was für einen Satz?

S. In gleichen Kreisen ruhen gleiche Winkel am Mittelpunkte oder am Umfange auf gleichen Bogen.

L. Dies ist ein ähnlicher Satz von einem andern, von dessen Wahrheit wir uns auch schon überzeugt haben. Was war dieses für einer?

S. Wenn in Einem Kreise Winkel am Umfange oder am Mittelpunkte auf einerley Bogen ruhen, so sind sie einander gleich.

L. Bey diesem Satze ist also von Einem Kreise die Rede, bey dem eben untersuchten aber von zwey gleichen Kreisen. Außerdem wird in jenem Satze von gleichen Bogen auf gleiche Winkel, hier aber von gleichen Winkeln auf gleiche Bogen geschlossen. Vielleicht sind wir im Stande, den jetzt bewiesenen Satz umzukehren, und dann wird dadurch der erwähnte erweitert. Doch zuvor noch einen andern Beweis davon. Wenn Fig. 108 G = H; wie ist dann BC gegen EF gehalten?

S. Gleich, weil die Dreyecke GBC und HEF einander gleich sind, indem

sie zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich haben.

L. Wenn nun aber BC = EF, und A = D, wie müssen dann die Abschnitte BAC und EDF beschaffen seyn?

S. Auch gleich, weil sie auf gleichen geraden Linien liegen und ähnlich sind, oder gleiche Winkel enthalten.

L. Und dann sind die Abschnitte BKC und ELF?

S. Ebenfalls einander gleich, weil sie die Reste zweyer gleichen Kreise BACK und EDFL sind, von welchen die beyden gleichen Stücke ABC und DEF weggenommen worden.

L. Und folglich ist der Bogen BAC?

S. Gleich dem Bogen EDF.

L. Und der Bogen BKC?

S. Gleich dem Bogen ELF.

L. Bey diesem Beweise gebrauchen wir die Sätze, welche wir von der Gleichheit der Abschnitte gleicher Kreise gehabt haben, und es hat derselbe wenigstens in Ansehung der Deutlichkeit vor dem vorhergehenden einigen Vorzug. Wiederholen Sie denselben noch einmal im Zusammenhange.

S. Wenn G = H so ist auch A = D, und wenn A = D so ist auch G = H. Zieht man nun die Linien BC und EF so ist

BC = EF, und

da A = D, auch

der Abschnitt BAC = dem Abschnitte EDF,

und

und folglich auch
der Abschnitt BKC = dem Abschnitte ELF.
Ist dies, so ist auch
der Bogen BAC = dem Bogen EDF und
der Bogen BKC = den Bogen ELF, und folglich stehen in gleichen Kreisen gleiche Winkel am Mittelpunkte so wohl als am Umfange auf gleichen Bogen.

L. Nun wollen wir diesen Satz umkehren. Was erhalten wir dann für einen?

S. In gleichen Kreisen sind Winkel am Mittelpunkte so wohl als am Umfange, wenn sie auf gleichen Bogen stehen, einander gleich.

L. Wie wollen Sie diesen Satz beweisen?

S Wenn diese Winkel einander nicht gleich wären, so müßte der eine größer als der andere seyn. Wäre aber dies, so könnte man den größern Winkel durch Wegnehmung eines Theils desselben dem andern gleich machen, und dann stünden diese gleiche Winkel auf ungleichen Bogen, welches nach dem vorhin bewiesenen unmöglich ist, indem gleiche Winkel am Mittelpunkte so wohl als am Umfange auf gleichen Bogen ruhen.

L. Erläutern Sie mir solches an einer Fig.

S (Zeichnet die 109te Figur.) Wenn in dieser Figur der Bogen BC = dem Bogen EF ist, so ist auch BGC = EHF. Denn wäre das nicht, so wäre einer dieser Winkel z. B. BGC größer als EHF, und dann BGK = EHF. Wäre, aber

BGK = EHF, so wäre
der Bogen BK = dem Bogen EF, welches unmöglich,
da der Bogen BKC = dem Bogen EF angenommen worden.

L. In den beyden gleichen Kreisen, Figur 110, ist BC = EF. Was sind Sie im Stande daraus zu schließen?

S. Ich werde mir erst einige Hülfslinien ziehen. (Er zeichnet die 111te Figur, worin BK, KC, EL und LF Halbmesser, und also unter einander gleich.)
Wenn BC = EF, so ist so wohl
der Bogen BAC = dem Bogen EDF, als
der Bogen BGG = dem Bogen EHF.
Denn es ist △ BKC = △ ELF, weil
BK = EL
KC = LF und
BC = EF. Folglich ist
BKC = ELF, und also
der Bogen BGC = dem Bogen EHF.

L. Gesetzt aber, daß in zwey gleichen Kreisen, ABC und DEF Fig. 111. z. B. zwey Bogen als BGC und EHF gleich sind, wie sind alsdann die geraden Linien BC und EF, von welchen jene gleiche Bogen abgeschnitten werden, beschaffen?

S. Sie sind gleich. Denn wenn man die Halbmesser BK, KC, EL und LF zieht, so erhält man zwey Dreyecke, worin zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich, und die gedachten Linien die dritten, dem

von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel gegenüber stehende, Seiten sind. Es ist nemlich Fig. 111. BK = KC = EL = LF, als Halbmesser gleicher Kreise, und BKC = ELF, als Winkel am Mittelpunkte in gleichen Kreisen, deren Schenkel auf gleichen Bogen ruhen.

L. Die Betrachtung der Abschnitte, womit wir unsere jetzige Unterredung angefangen haben, führte uns vorhin wieder zur Betrachtung der Winkel am Umfange eines Kreises, indem die Winkel am Umfange eines Kreises auch, wie angemerkt worden, als Winkel im Abschnitte angesehen werden können. Wir sind auf diese Art eben den Weg gegangen, den wir schon bey der Untersuchung der Dreyecke und Parallelogramme genommen haben. Nachdem wir uns da von der Gleichheit der ganzen Figuren überzeugt hatten, untersuchten wir jedesmal die Gleichheit der dabey vorkommenden einzeln Stücke. Eben das haben wir auch hier gethan, und deswegen auch zuletzt die Bogen und die Sehnen gegebener Abschnitte insbesondere untersucht. Lassen Sie uns auf diesem Wege fortgehen, und einige besondere Fälle betrachten. Fig. 112. ist E der Mittelpunkt des daselbst beschriebenen Kreises, und BC der Durchmesser desselben. Der Abschnitt BADC ist also ein halber Kreis, der Abschnitt ABC größer, und der Abschnitt ADC kleiner als ein halber Kreis. Der Winkel

BAC ist also ein Winkel im Halbkreise, der Winkel ABC ein Winkel in einem Abschnitte, der grösser, und der Winkel ADC ein Winkel in einem Abschnitte, der kleiner ist, als ein halber Kreis. Wie groß ist nun ein jeder dieser Winkel?

S. Der Winkel im Halbkreise ist einem rechten Winkel gleich, der Winkel im größern Abschnitte aber kleiner, und der Winkel im kleinern Abschnitte grösser als ein rechter Winkel.

L. Wie so?

S. Am Ende unserer letzten Unterredung haben Sie mir gezeigt, daß die Winkel im Abschnitte größer werden, wenn der Abschnitt kleiner, und kleiner, wenn der Abschnitt größer wird. Wenn also der Winkel im Halbkreise einem rechten Winkel gleich ist, so muß der Winkel in einem größern Abschnitte kleiner, und der Winkel in einem kleinern Abschnitte größer als ein rechter Winkel seyn.

L. Ich zweifele nicht daran, daß Sie bey dieser Folge von dem angeführten Satze gewiß zu seyn glauben; allein Sie können Sich vielleicht noch deutlicher davon überzeugen. Vorausgesetzt nemlich, was schon bewiesen ist, daß BAC = R sey, so sind in dem Dreyecke BAC die beyden übrigen Winkel ABC nemlich und ACB — was für welche?

S. Spitzige, denn in einem Dreyecke kann nur ein Winkel ein rechter seyn.

L. Was ist ferner BADC für eine Figur?

S.

S. Ein Viereck, dessen Winkelspitzen in dem Umfange eines Kreises liegen?

L. Und davon wissen wir?

S. Daß darin jede zwey gegenüber stehende Winkel zusammen genommen zwey rechte Winkel ausmachen?

L. Also sind ABC und ADC zusammen genommen?

S. Zwey rechten Winkeln gleich.

L. Und da ABC ein spitziger Winkel ist, so muß daher der Winkel ADC?

S. Ein stumpfer Winkel seyn.

L. Daß BAC $=$ R sey, läßt sich, wie schon bekannt, beweisen, wenn nur vorausgesetzt wird, daß BEC ein Durchmesser, und also E der Mittelpunkt sey. Denn man darf nur von A nach E eine gerade Linie ziehen, und dieselbe bis nach dem Umkreise verlängern, so fällt in die Augen, daß der Fall da sey, den wir bey der 91ten Figur gehabt haben. Setzt man nun bloß voraus, daß BEC der Durchmesser sey, so kann man vermittelst des Satzes, daß der Winkel am Umfange, dessen Schenkel auf einem Bogen ruhen, der durch einen Durchmesser abgeschnitten wird, ein rechter Winkel sey, auch darthun, daß jeder Durchmesser den Kreis in zwey gleiche Theile theile; denn er theilt den Kreis jedesmal in zwey Abschnitte, deren gemeinschaftliche Sehne er ist, und welche einen rechten Winkel fassen und also einander ähnlich sind. Will man den

Satz, daß jeder Durchmesser den Kreis in zwey gleiche Theile theile, nicht bis hieher verschieben, und es wäre unbequem, weil man alsdann statt der Benennung halber Kreis oder Halbkreis eine weitläuftigere Umschreibung gebrauchen müßte, so läßt sich von Anfang an durch das Aufeinanderlegen solcher Abschnitte, die durch einen Durchmesser gemacht worden, derselbe leicht darthun; indeß kann es nicht schaden, auch auf die gegenwärtige Art sich wenigstens daran zu erinnern. Sollten wir nun wohl noch Winkel bey einem Kreise zu betrachten haben?

S. Wir haben von den Winkeln am Mittelpunkte und am Umfange gesprochen, und beyde Arten so wohl einzeln für sich als mit einander in Vergleichung betrachtet. Die Winkel am Umkreise haben wir auch als Winkel im Abschnitte kennen gelernt, und da wir nicht bloß diese Winkel überhaupt betrachtet, sondern auch die Größe derselben zu bestimmen gesucht haben, so ist hiervon wohl nichts mehr übrig. Allein nun fehlen noch die Winkel, welche Tangenten mit Sehnen machen, und dann auch noch die vermischtlinigen Winkel, welche entweder von einer Tangente und einem Bogen, oder von einem Bogen und einer Sehne gemacht werden.

L. Und das wird also der Gegenstand unserer nächsten Unterredung seyn.

Dreyzehntes Gespräch.

L. Was folgen also nunmehr für Winkel?

S. Die Winkel, welche eine Tangente eines Kreises mit einer Sehne derselben macht.

L. Macht eine jede Tangente mit einer jeden Sehne einen Winkel?

S. Nein, dann aber, wenn die Sehne aus dem Berührungspunkte der Tangente gezogen worden, wie Fig. 113, wo AB den daselbst befindlichen Kreis in D berühret, und DE eine aus D gezogene Sehne ist.

L. Was sind hier für Winkel?

S. Die Winkel ADE und EDB.

L. Und was wäre wohl dabey zu bemerken?

S. Ich sehe weiter nichts, als daß ADE + EDB = 2R sind, allein, um das zu bemerken, dürfen diese Winkel wohl nicht erst besonders untersucht werden.

L. Sie muthmaßen mit Recht, daß es hier eine andere Behauptung geben müsse; die Winkel, welche eine Tangente mit einer aus ihrem Berührungspunkte gezogenen Sehne macht, bloß unter sich zu vergleichen, kann die Absicht dieser Behauptung nicht seyn, und es müssen sich also alsdann, wenn aus dem Berührungspunkte eine Tangente einer Sehne gezogen ist, noch andere Winkel gedenken lassen.

S.

S. Zwey Abschnitte sehe ich wohl in der 113ten Figur, allein keine Winkel.

L. Lassen sich nicht in jedem Abschnitte Winkel gedenken?

S. Ja. Soll ich etwa die Winkel in den Abschnitten, welche die Sehne D E macht, mit den Winkeln der Tangente und der Sehne vergleichen?

L. Da wir bereits die Winkel im Abschnitte untersucht haben, und sie also als bekannt betrachten können, so ist allerdings diese Vergleichung anzurathen. Stellen Sie Sich aber zuvor, um sich dieselbe zu erleichtern, die Winkel in den Fig. 113 durch die Sehne DE gemachten Abschnitten, sinnlich dar.

S. (Zeichnet die 114te Figur.) Hier ist F der Winkel im Abschnitte D F E, und G der Winkel im Abschnitte D G E.

L. Ich will Ihnen Zeit zur Untersuchung dieser Winkel im Abschnitte und zu ihrer Vergleichung mit den Winkeln der Tangente und der aus ihrem Berührungspunkte gezogenen Sehne lassen. Versuchen Sie, ohne Leitung den Satz zu finden, der hier behauptet werden kann.

S. Das sehe ich wohl, daß F und G zusammen genommen so groß als zwey rechte Winkel sind, denn die Figur F E G D ist ein Viereck, dessen Winkelspitzen in dem Umfange eines Kreises liegen, und F und G sind darin zwey gegenüber stehende Winkel. Allein

daß

daß F + G = 2 R und daher auch, weil ADE + EDB ebenfalls = 2 R, F + G = ADE + EDB, ist doch wohl noch nicht alles, was ich hier finden soll.

L. Besser wäre es allerdings, wenn Sie jeden Winkel in den hier befindlichen Abschnitten mit den Winkeln der Tangente und der aus ihrem Berührungspunkte gezogenen Sehne einzeln genommen vergleichen könnten.

S. Da sehe ich aber kein Mittel dazu.

L. Wenn Sie, wie Fig. 115 DF durch den Mittelpunkt ziehen, wird nicht dann F ebenfalls der Winkel in dem Abschnitte DFE?

S. Ja, denn alle Winkel in einem Abschnitte sind gleich.

L. Wie steht nun FD auf AB?

S. Senkrecht, weil sie aus dem Berührungspunkte gezogen ist, und durch den Mittelpunkt geht.

L. Und was ist FED für ein Winkel?

S. Ein rechter Winkel, denn es ist ein Winkel in einem Halbkreise.

L. Nun denken Sie weiter nach.

S. — — Da FED = R und FED + EFD + FDE = 2R; so ist EFD + FDE = R. Nun ist ferner FDB = FDE + EDB = R, und folglich LFD + FDE = FDE + EDB, und also EFD = EDB. Der eine Winkel im Abschnitte ist also dem einen von den Winkeln der Tangente und der aus ihrem Berührungs-

rungspunkte gezogenen Sehne gleich. Wie ist es nun aber mit dem andern beschaffen? —

L. Vorhin bemerkten Sie, daß F ✠ G = ADE ✠ EDB sey. Wenn nun F = EDB ist, was folgt dann?

S. Daß G = ADE ist, und also sind einzeln genommen, wenn eine gerade Linie einen Kreis berührt, und eine Sehne aus ihrem Berührungspunkte gezogen ist, die Winkel der Tangente und Sehne den Winkeln in den von der Sehne gemachten Abschnitten gleich.

L. In welcher Ordnung die gedachten Winkel einzeln genommen werden müssen, muß wohl noch mit hinzugesetzt werden; denn F ist doch nicht EDA, und G nicht EDB, sondern F dem Winkel EDB, und G dem Winkel EDA gleich.

S. Der Abschnitt, dessen Winkel dem Winkel der Tangente und der Sehne gleich ist, liegt auf der andern Seite der Sehne.

L. Dies drückt man durch das Wort, wechselsweise aus, und so hiesse unser Satz?

S. Wenn aus dem Berührungspunkte einer Tangente eine Sehne gezogen wird, so sind die Winkel, welche die Tangente und Sehne machen, wechselsweise den Winkeln in den durch die Sehne entstandenen Abschnitten gleich.

L. Wenn Fig. 113 bloß die Tangente AB gezogen und der Berührungspunkt D be-

bemerkt wäre; wären Sie dann wohl im Stande, an D einen jeden gegebenen Winkel zu legen?

S. Warum nicht, das habe ich ja schon in der Lehre von den Dreyecken gelernt.

L. Und wenn Sie nun an D einen gegebenen Winkel legen, und die aus D gezogene Linie so weit verlängern, bis sie den Umkreis erreicht, und also eine Sehne wird; erhalten Sie alsdann nicht auch einen Abschnitt, welcher den gegebenen Winkel enthält?

S. Ja, und zwar auf der andern Seite der Sehne.

L. Gesetzt also, daß Ihnen ein Kreis und ein Winkel gegeben wäre, und verlangt würde, daß Sie von demselben einen Abschnitt abschneiden sollten, welcher diesen Winkel enthielte; wie würden Sie das machen?

S. Ich zöge zuerst eine Tangente, legte auf dieselbe an den Berührungspunkt den gegebenen Winkel, und verlängerte die dabey aus dem Berührungspunkte gezogene Linie bis an den Umkreis. Der Abschnitt auf der andern Seite der Sehne wäre der verlangte Abschnitt. Wenn ich z. B. Fig. 113, vorausgesetzt, daß bloß der Kreis daselbst gegeben wäre, einen Abschnitt abschneiden sollte, der einen ADE gleichen Winkel enthielte; so zöge ich die Tangente ADB, legte auf diese Tangente an D den Winkel ADE, und verlängerte den aus *D* gezogenen Schenkel bis er wie hier eine

Sehne würde. Der kleinere Abschnitt wäre der verlangte.

L. Dies Verfahren ist ganz richtig, wie Ihnen auch selbst aus dem vorhergehenden bekannt ist. Wie nun aber, wenn Sie über einer gegebenen geraden Linie einen Abschnitt beschreiben sollten, der einen gegebenen Winkel enthielte? Sie können das, was Sie hier zu thun haben, leicht durch eine nochmalige aufmerksame Betrachtung der 113ten und folgenden Figuren finden. Ueberlegen Sie dieselben also nochmals sorgfältig in Rücksicht auf die vorgelegte Frage.

S. In dem verlangten Abschnitte muß die gegebene Linie eine Sehne werden, und man muß also einen Kreis beschreiben, der durch ihre beyde Endpunkte geht. Allein dadurch erhält man über der gegebenen Linie zwar einen Abschnitt, aber noch nicht einen Abschnitt, der den gegebenen Winkel faßt. — Man verbindet also mit der gegebenen Linie unter dem gegebenen Winkel eine andere, errichtet auf dieser in dem Verbindungspunkte eine senkrechte Linie, theilet ferner die gegebene Linie in zwey gleiche Theile, und errichtet aus dem Theilungspunkte ebenfalls eine Perpendiculäre. Da wo beyde senkrechte Linien sich schneiden, ist der Mittelpunkt des Kreises, von welchem die gegebene Linie einen Abschnitt mit dem verlangten Winkel abschneidet. Wenn z. B. über der Linie AB Fig. 116 ein Abschnitt beschrieben wer-

werden sollte, welcher den Winkel E D C faß-
te, so legte man zuvörderst an A B Fig. 117
A D so, daß D A B = C D E würde. Dann
errichtete man A F senkrecht auf A D, theilte
A B in C in zwey gleiche Theile, und errichtete
aus C über A B, die senkrechte Linie C G. Da
wo sich A F und C G schnitten, hier in E, wäre
der Mittelpunkt des Kreises, von welchem A B
einen Abschnitt, der den Winkel C D E faßte,
abschnitte, und zwar wäre solches hier der grö-
ßere Abschnitt.

L. Wie beweisen Sie die Richtigkeit die-
ses Verfahrens?

S. Wenn aus E mit dem Halbmesser
E A oder E B ein Kreis beschrieben wird, so
ist, weil D A senkrecht auf E A ist, diese D A ei-
ne Tangente desselben, und A B eine Sehne,
welche aus dem Berührungspunkte der Tan-
gente gezogen worden. Folglich ist D A B =
C D E = dem Winkel im Abschnitte B H A.

L. Sie setzten vorhin voraus, daß die
beyden Linien A F und C G sich schneiden; ha-
ben Sie dazu ein Recht?

S. Ja, diese Linien müssen verlängert
einander schneiden, weil, indem sie von einer
dritten geschnitten werden, die beyden innern
gegenüber stehenden Winkel kleiner als zwey
rechte Winkel sind. Denn da D A E = A C E
= R, und D A E + A C E = 2 R, so muß
C A E + A C E < 2 R seyn, und A F und
C G also sich schneiden.

L. Wie aber, wenn der gegebene Winkel ein rechter Winkel wäre, oder ein Abschnitt verlangt würde, welcher einen rechten Winkel faßte?

S. Dann fiele die auf AD zu errichtende senkrechte linie auf AB, und der Mittelpunkt wäre in dem Theilungspunkte der linie AB. In diesem Falle hat man also nur nöthig, die gegebene linie in zwey gleiche Theile zu theilen, und aus dem Theilungspunkte mit ihrer Hälfte einen halben Kreis zu beschreiben.

L. Dies könnte vielleicht eine bequeme Art, einen rechten Winkel zu beschreiben, an die Hand geben?

S. O ja. Wenn man einen rechten Winkel beschreiben will, so darf man nur über einer geraden linie einen halben Kreis beschreiben, und darin den Winkel im Abschnitte machen.

L. Die Betrachtung der Kreisabschnitte hat uns auf die Betrachtung der Winkel darin, und jetzt die Betrachtung der Winkel wieder zu den Kreisabschnitten geführt. Die vermischtlinigen Winkel, welche entweder eine Tangente und ein Bogen, oder eine Sehne und ein Bogen macht, bey Seite gesetzt, ist uns alsdann noch etwas von dem Kreise übrig?

S. Alsdann wüßte ich nichts weiter, denn wir haben die linien, welche dabey vorkommen, die geraden und krummen, ferner die Winkel und endlich die Ausschnitte und Abschnitte bereits betrachtet.

L. Von den gedachten vermischtlinigen Winkeln hätte ich gerade nicht nöthig mit Ihnen zu reden, indem bey den Winkeln vorzüglich die Betrachtung der geradlinigen Winkel unsere Pflicht ist. Indeß werde ich am Ende der Betrachtung des Kreises doch auch davon ein Paar Worte sagen. Aber dies Ende haben wir, wie Sie meinen, noch nicht erreicht. Haben wir nicht bey der Betrachtung der Dreyecke, nachdem wir die Seiten und Winkel derselben selbst untersucht hatten, am Ende auch die Rechtecke ihrer Seiten unter einander vergleichen?

S. Ja, und so sind auch hier wohl noch Rechtecke zwischen gewissen Linien im Kreise zu betrachten?

L. Ja, und zwar erstlich die Rechtecke zwischen den Theilen zweyer Sehnen, die sich schneiden. Fig. 118 schneiden sich die beyden Sehnen A C und B D in E, und es frägt sich nun, wie die Rechtecke zwischen A E und E C, und zwischen B E und E D beschaffen seyn werden?

S. Diese Frage scheint mir schwer zu seyn, ich sehe wenigstens noch gar keinen Weg, die Antwort darauf zu finden.

L. In F Fig. 119 sey der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, und F H sey auf B D und F G auf A C senkrecht; was findet alsdann statt?

S. Dann ist BH = HD, u. AG = GC.

L. Und wie sind nun die beyden Sehnen AC und BD getheilt?

S. In zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile.

L. Und dann ist?

S. Einmal AE × EC + EGq = GCq und zweytens BE × ED + EHq = HBq.

L. Wie, wenn wir nun die linien FE, FB und FC zu Hülfe nehmen? Was erhalten wir dann für Dreyecke?

S. Vier rechtwinklige Dreyecke, nemlich △GEF, △FEH, △FGC und △FBH.

L. Vorhin bemerkten Sie, daß AE × EC + GEq = GCq sey. Setzen Sie auf beyden Seiten GFq = GFq hinzu.

S. Dann erhalte ich AE × EC + GEq + GFq = GCq + GFq. Und nun ist GEq + GFq = FEq und GCq + GFq = FCq, und folglich AE × EC + FEq = FCq.

L. Sollte sich nicht die andere vorhin gefundene Behauptung BE × ED + EHq = HBq auf eine ähnliche Art behandeln lassen?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Ja, denn wenn ich hier auf beyden Seiten FHq hinzusetze, so erhalte ich BE × ED + EHq + FHq = HBq + FHq. Da nun

EHq

$EHq + FHq = FEq$ und
$HBq + FHq = FBq$, so ist
$BE \times ED + FEq = FBq$.

L. Vergleichen Sie diese Behauptung mit der vorhergehenden.

S. Nun sehe ich schon, wie ich fortfahren kann. Da

$AE \times EC + FEq = FCq$ und
$BE \times ED + FEq = FBq$ und
$FC = FB$, und also auch
$FCq = FBq$; so ist
$AE \times EC + FEq = BE \times ED +$
FEq und folglich auch
$AE \times EC = BE \times ED$.

L. Was hat man also, um den Satz: Wenn in einem Kreise zwey Sehnen sich schneiden, so sind die Rechtecke zwischen den Theilen derselben einander gleich; zu beweisen, zu thun?

S. Man zieht zuvörderst aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die sich schneidenden Sehnen senkrechte Linien, theilet dieselben dadurch in zwey gleiche Theile, und verbindet ferner den gedachten Mittelpunkt so wohl mit dem Schneidungspunkte der Sehnen als mit ihren Endpunkten durch gerade Linien.

L. Und was für Sätze gebraucht man vorzüglich bey dem Beweise?

S. Einmal den pythagorischen Lehrsatz, und dann folgenden: Wenn eine gerade Linie in zwey gleiche und in zwey ungleiche Theile getheilt ist, so ist das Rechteck zwischen den beyden

den ungleichen Theilen nebst dem Quadrate des Stücks zwischen den Theilungspunkten so groß als das Quadrat der Hälfte.

L. In der 118ten Figur sind die Linien AC und BD zwey Sehnen im strengen Verstande, und also weder beyde noch die eine davon ein Durchmesser. Wenn man in dem erwiesenen Satze anstatt des Worts Sehnen, die Benennung gerade linien setzt, so wird dadurch der Satz allgemeiner. Wie viel Fälle sollte es aber dann wohl geben?

S. (Nach einigem Nachdenken.) Drey; gerade linien, welche sich im Kreise schneiden, sind entweder beyde Durchmesser, oder nur eine davon ist ein Durchmesser, oder es ist keine derselben ein Durchmesser.

L. Wenn die eine von zwey geraden linien, die in einem Kreise sich schneiden ein Durchmesser ist, so stehen diese linien entweder senkrecht auf einander oder nicht. Es theilet sich also dieser Fall von neuem in zwey, und also sind ihrer in allen?

S. Viere.

L. Ist denn nun auch wohl für einen jeden dieser Fälle wahr, daß die Rechtecke zwischen den Theilen zweyer in einem Kreise sich schneidenden geraden linien gleich seyn?

S. Man muß solches zuvor für einen jeden Fall untersuchen. — Der erste Fall ist sehr leicht, den kann man sich selbst ohne Figur vorstellen. Wenn die beyden geraden linien

nien, die in einem Kreise sich schneiden zwey Durchmesser sind, so schneiden sich dieselben im Mittelpunkte und halbiren einander. Die Rechtecke zwischen ihren Theilen ind also Quadrate des Halbmessers des gegebeien Kreises, und müssen daher einander gkich seyn. Zu dem andern Falle aber muß ich mir schon eine Figur zeichnen. (Der Schüler zeichnet die 119te Figur.) Wenn hier CD ein Durchmesser und senkrecht auf AB ist, so wird dadurch AB in F in zwey gleiche Theile getheilet, und das Rechteck zwischen AF × FB ist daher ein Quadrat, nemlich AFq oder FBq. Ist also CF × FD = FBq? (Denkt eine Zitlang nach.) Ja. Denn da CD in E in zwey gleihe und in F in zwey ungleiche Theile getheilt wœden, so ist

$$CF \times FD + FEq = EDq.$$

Wird nun die Linie EB (Fig. 120) gezogen, so ist ED = EB, und EDq = EIq und also

$$CF \times FD + FEq = EBq.$$

Da nun

$$EBq = FEq + FBq,$$

so st

$$CF \times FD + FEq = FEq + FBq$$

und daher $CF \times FD = FBq$.

L. Versuchen Sie diesen Saz mit Worten auszudrücken.

S. Wenn ein Durchmesser eines Kreises eine Sehne desselben senkrecht sich schneidet, so ist das Rechteck zwischen den beyen Theilen des Durchmessers dem Quadrate der Hälfte der Sehne gleich.

L. Wie ist es nun im dritten Falle?

S. Da werden zwey Rechtecke mit einander vrglichen; denn wenn der Durchmesser die Sehne nicht senkrecht schneidet, so halbiret er se auch nicht. Ich will mir hier nur gleich weder eine Figur entwerfen. (Er zeichnet die karte Figur.) Ich habe hier zugleich aus dem Mttelpunkte E die linie E G senkrecht auf A B und ausserdem auch E A gezogen, denn diese linien werde ich wohl zum Beweise gebrauchen. — Da C D in E in zwey gleiche und in F in zwey ungleiche Theile getheilet worden, so ist

C F ✕ F D + E F q = E D q; und da auch AB in F in zwey ungleiche und in G in zwey gliche Theile getheilet ist, so ist

A F ✕ F B + F G q = A G q. Setzt man nun hier

E G q = E G q auf beyden Seiten hinzu, so wird

A F ✕ F B + F G q + E G q = A G q + E G q. Nun ist aber

F G q + E G q = E F q und

A G q + E G q = A E q = E D q. Folglich

A F ✕ F B + E F q = E D q. Da nun auch C F ✕ F D + E F q = E D q, so ist

A F ✕ F B + E F q = C F ✕ F D + E F q und

A F ✕ F B = C F ✕ F D.

L. So haben wir nun alle hier mögliche Fälle betrachtet, und nun können wir den Satz: Wenn in einem Kreise zwey gerade linien einander

ander schneiden, so sind die Rechtecke zwischen ihren Theilen einander gleich; ganz allgemein und nicht bloß von Sehnen im strengen Verstande behaupten. Nun zu einem ähnlichen Satze. Betrachten Sie die 122te Figur. DB soll daselbst eine Tangente für den Punkt B seyn, und D durch den Mittelpunkt gehen. Sollten Sie nun wohl beweisen können, daß

$$DC \times DA = DBq?$$

S. In DA habe ich eine gerade Linie CA, die in E in zwey gleiche Theile getheilt, und darauf bis nach D verlängert ist. Da könnte ich nach dem Satze, den wir von dergleichen Linien gehabt haben, behaupten, daß

$$DC \times DA + CEq = DEq.$$

Es wird nun darauf ankommen, ob mir diese Behauptung etwas helfen wird. (Denkt eine Zeitlang nach.) Ich werde wohl noch eine Hülfslinie nöthig haben, und will also Fig. 123 BE ziehen, welche die Linien BD und DE in Verbindung bringt. — BE steht aber auf BD senkrecht, weil B der Berührungspunkt und E der Mittelpunkt ist, und also ist BDE ein rechtwinkliges Dreyeck. — Nun ist

$$DEq = BDq + BEq, \text{ und da}$$
$$DC \times DA + CEq = DEq \text{ war, so ist}$$
$$DC \times DA + CEq = BDq + BEq.$$

Wie nun weiter? — Da $CEq = BEq$ indem $CE = BE$, so ist ja auch

$$DC \times DA = BDq.$$

L. In der 122ten und 123ten Figur ist aus einem Punkte ausserhalb eines Kreises eine Tangente BD und eine andere gerade Linie durch den Mittelpunkt des Kreises bis nach dem Umfange gezogen worden. Was kann man also in einem solchen Falle behaupten?

S. Daß das Quadrat der Tangente gleich sey dem Rechtecke zwischen dem Stücke der andern Linie ausser dem Kreise und der ganzen Linie.

L. Sollte wohl eben dasselbe statt finden, wenn DA nicht durch den Mittelpunkt gezogen wäre. Betrachten Sie die 124te Figur.

S. Hier sehe ich noch nicht, ob es möglich ist. Im vorhergehenden Falle war die Linie DA, da sie durch den Mittelpunkt gieng, durch den Mittelpunkt, dem Stücke CA nach, in zwey gleiche Theile getheilt, aber das ist hier nicht.

L. Wie denn, wenn wir aus dem Mittelpunkte E die Linie EF senkrecht auf CA zögen? Figur 125.

S. Dann wäre CA in F in zwey gleiche Theile getheilt, und CD dazu gefügt, und es wäre also

DC × DA + CFq = DFq. Allein wie soll ich hiervon zu BDq kommen?

L. Durch Hülfslinien natürlicher Weise, welche die Linie BD mit der Linie DA verknüpfen. Ziehen Sie (Fig. 126.) BE, und damit Sie ein Dreyeck erhalten, auch DE.

S.

S. Dann ist DBE = R und DEq = BDq + BEq, aber damit komme ich auch noch nicht aus.

L. Ist DFq so groß als DEq?

S. Nein, sondern DFq + FEq ist gleich DEq, weil DFE = R.

L. Vorhin behaupteten Sie, daß DC × DA + CFq = DFq. Sezzen Sie auf beyden Seiten FEq hinzu. Was erhalten Sie dann?

S. DC × DA + CFq + FEq = DFq + FEq.

L. Und nun CE gezogen (Fig. 127.) so ist CFq + FEq?

S. Gleich CEq.

L. Oder BEq?

S. Ja; denn CE ist gleich BE.

L. Und DFq + FEq?

S. Gleich DEq.

L. Folglich wird, wenn Sie gehörig gleiches statt gleiches sezzen, DC × DA + CFq + FEq = DFq + FEq verwandelt?

S. In DC × DA + BEq = DEq.

L. Und da DEq = BDq + BEq; so ist auch?

S. DC × DA + BEq = BDq + BEq.

L. Und folglich?

S. DC × DA = BDq.

L. Wiederholen Sie nun den ganzen Beweis.

S. Da DBE = R und DFE = R; und CF = FA; so ist
DC × DA + CFq = DFq. Nun ist
FEq = FEq und also
DC × DA + CFq + FEq = DFq
+ FEq, oder
DC × DA + CEq = DEq oder
DC × DA + BEq = DEq, weil
CFq + FEq = CEq und
DFq + FEq = DEq und
CE = BE. Da nun ferner
DEq = BDq + BEq, so ist
auch DC × DA + BEq = BDq + BEq
und also DC × DA = BDq.

L. Wir können also nunmehr auch allgemein behaupten, daß, wenn aus einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine andere Linie innerhalb nach dem Umfange gezogen wird, das Quadrat der Tangente so groß sey, als das Rechteck zwischen der andern ganzen Linie und ihrem Theile außer dem Kreise. Würden Sie aber auch wohl bey Figur 128 diesen Satz beweisen können?

S. Ich will mir nur zuerst die nöthigen Hülfslinien ziehen. (Er zieht EF senkrecht auf DA, ferner BE, DE und EC, wie Figur 129 zeigt.) Da CFE = R und CF = FA, und DBE = R, so ist
DC × CA + CFq = DFq. Nun ist
EFq = EFq, und also

DC

$DC \times CA + CFq + EFq = DFq$
$+ EFq$, oder
$DC \times CA + CEq = DEq$ oder
$DC \times CA + BEq = DEq$, weil
$CFq + EFq = CEq$ und
$DFq + EFq = DEq$ und
$CE = BC$. Da nun auch
$DEq = BDq + BEq$, so ist ferner
$DC \times CA + BEq = BDq + BEq$
und $DC \times CA = BDq$

1. Wir werden diesen Satz in der Folge sehr nöthig gebrauchen, und nicht bloß so, wie wir ihn gehabt haben, sondern auch umgekehrt, und wir wollen also auch so von seiner Richtigkeit uns zu überzeugen suchen. Er heißt umgekehrt: Wenn aus einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwey gerade linien gezogen werden, davon die eine ihn trifft, und die andere ihn schneidet, und das Rechteck aus der ganzen schneidenden linie und ihrem Stücke außer dem Kreise dem Quadrate der linie gleich ist, die den Kreis trifft; so ist diese letztere eine Tangente des Kreises. Ich will Ihnen diesen Satz zuvor an einer Figur erläutern. Figur 130 soll DB den Kreis in B treffen, und DA ihn schneiden, und $DBq = DC \times DA$ seyn. Nun muß bewiesen werden, daß DB eine Tangente, oder welches einerley ist, auf BE, wenn dieselbe gezogen wird, senkrecht sey. Wie wollen Sie dies beweisen?

E. Wenn DB nicht die Tangente ist, die aus dem Punkte D gezogen werden kann, so ist eine andere aus D gezogene Linie, die den Kreis oberhalb oder unterhalb B trifft, diese Tangente, und dann im ersten Falle Fig. 131 DG < DB und im zweyten DH > DB. Wenn das ist, so ist im ersten Falle nach dem vorhergehenden Satze

$$DC \times DA = DGq.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DBq$$

seyn soll, so müßte

$$DGq = DBq$$

und also

$$DG = DB$$

seyn, welches unmöglich ist. Im zweyten Falle aber wäre

$$DC \times DA = DHq.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DBq,$$

so müßte

$$DHq = DBq$$

und also

$$DH = DB$$

seyn, welches ebenfalls dem widerstreitet, daß $DH > DB$ wäre.

L. Sie haben diesen umgekehrten Satz so bewiesen, wie wir bisher alle umgekehrten Sätze bewiesen haben, und ihr Beweis ist allerdings richtig, wenn hinzugesetzt wird, daß BG und BH mit DB auf einer Seite der aus *D* gezogenen Linie liegt, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Es giebt aber hier auch noch einen andern Beweis. Angenommen, daß Fig. 132 $DBq = DC \times DA$, und F der Mittelpunkt des daselbst befindlichen Kreises ist; so ist, wenn man aus *D* die Tangente *DE*, und außer ihr die Linien *DF*, FE und BF zieht,

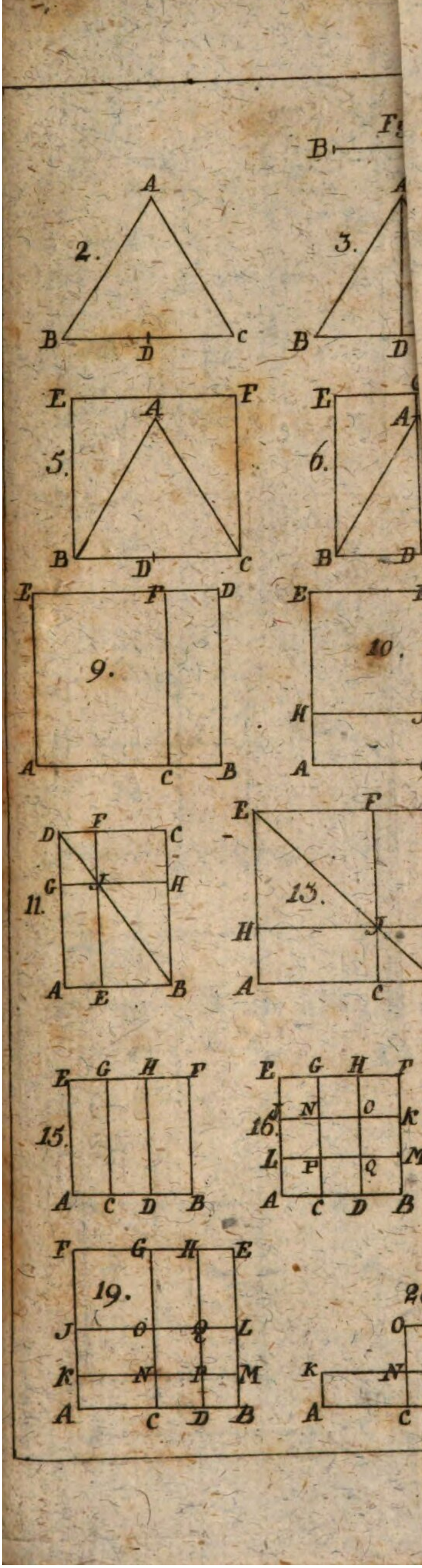


Fig
B
A
2.
B
D
C
A
3.
B
D
E
A
F
5.
B
D
C
E
A
6.
B
D
E
F
D
9.
A
C
B
E
F
10.
H
J
A
C
F
D
C
11.
G
H
A
E
B
E
F
13.
H
A
C
E
F
15.
A
C
D
B
E
G
H
F
16.
N
O
K
L
P
Q
M
A
C
D
B
F
G
H
E
19.
J
O
Q
L
K
N
P
M
A
C
D
B
20.
O
Q
K
N
P
A
C
D

E. Wenn DB nicht die Tangente ist, die aus dem Punkte D gezogen werden kann, so ist eine andere aus D gezogene Linie, die den Kreis oberhalb oder unterhalb B trifft, diese Tangente, und dann im ersten Falle Fig. 131 DG < DB und im zweyten DH > DB. Wenn das ist, so ist im ersten Falle nach dem vorhergehenden Satze

$$DC \times DA = DG^q.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DB^q$$

seyn soll, so müßte

$$DG^q = DB^q$$

und also

$$DG = DB$$

seyn, welches unmöglich ist. Im zweyten Falle aber wäre

$$DC \times DA = DH^q.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DB^q,$$

so müßte

$$DH^q = DB^q$$

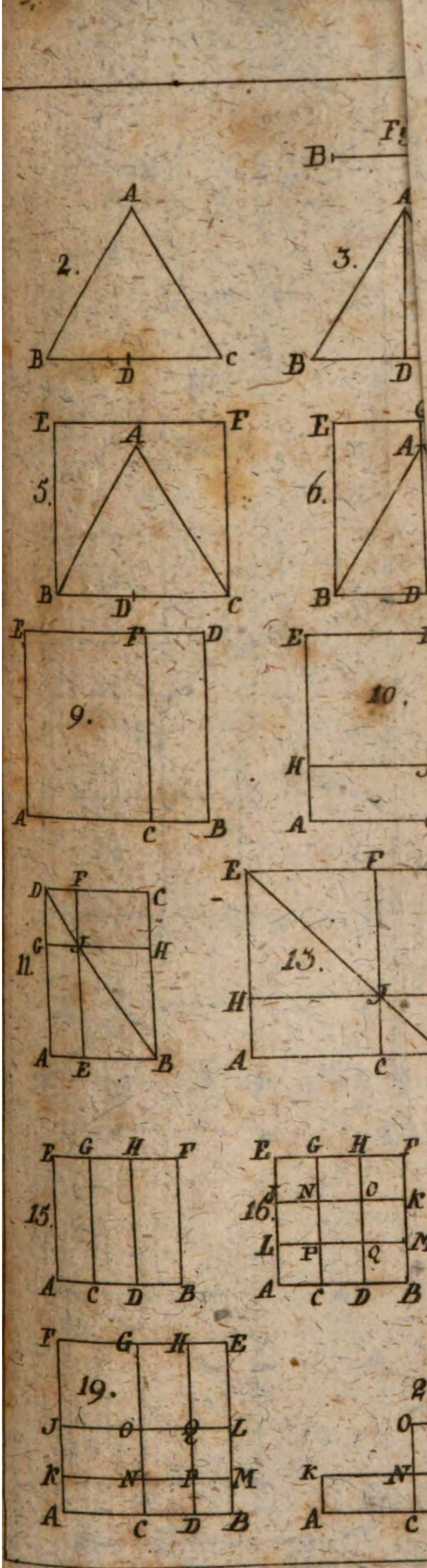
und also

$$DH = DB$$

seyn, welches ebenfalls dem widerstreitet, daß $DH > DB$ wäre.

L. Sie haben diesen umgekehrten Satz so bewiesen, wie wir bisher alle umgekehrten Sätze bewiesen haben, und ihr Beweis ist allerdings richtig, wenn hinzugesetzt wird, daß BG und BH mit DB auf einer Seite der aus *D* gezogenen Linie liegt, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Es giebt aber hier auch noch einen andern Beweis. Angenommen, daß Fig. 132 $DB^q = DC \times DA$, und F der Mittelpunkt des daselbst befindlichen Kreises ist; so ist, wenn man aus *D* die Tangente *DE*, und außer ihr die Linien *DF*, FE und BF zieht,

DE^q


B
A
2.
B
D
C
A
3.
B
D
L
F
A
5.
B
D
C
E
C
A
6.
B
D
E
F
D
9.
A
C
B
E
10.
H
J
A
C
D
F
C
11.
G
H
A
E
B
E
F
13.
H
A
C
B
E
G
H
F
15.
A
C
D
B
E
G
H
F
N
O
K
16.
L
P
Q
M
A
C
D
B
F
G
H
E
19.
J
O
Q
L
K
N
P
M
A
C
D
B
20.
O
Q
K
N
P
A
C
D

E. Wenn DB nicht die Tangente ist, die aus dem Punkte D gezogen werden kann, so ist eine andere aus D gezogene Linie, die den Kreis oberhalb oder unterhalb B trifft, diese Tangente, und dann im ersten Falle Fig. 131 DG < DB und im zweyten DH > DB. Wenn das ist, so ist im ersten Falle nach dem vorhergehenden Satze

$$DC \times DA = DGq.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DBq$$

seyn soll, so müßte

$$DGq = DBq$$

und also

$$DG = DB$$

seyn, welches unmöglich ist. Im zweyten Falle aber wäre

$$DC \times DA = DHq.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DBq,$$

so müßte

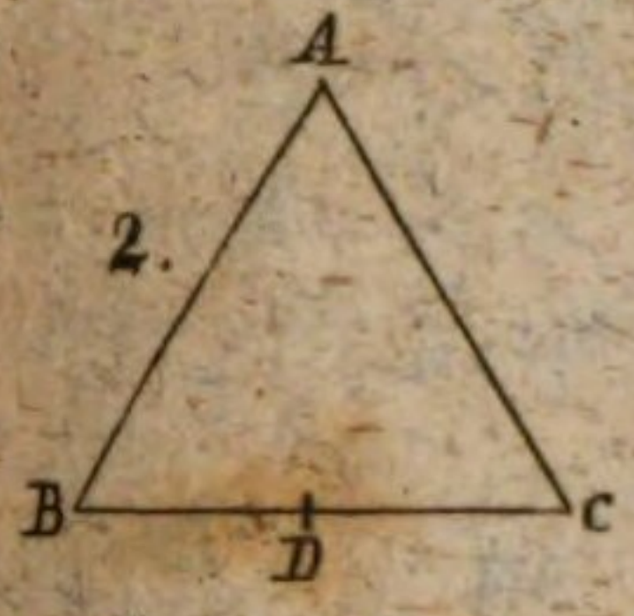
$$DHq = DBq$$

und also

$$DH = DB$$

seyn, welches ebenfalls dem widerstreitet, daß DH > DB wäre.

L. Sie haben diesen umgekehrten Satz so bewiesen, wie wir bisher alle umgekehrten Sätze bewiesen haben, und ihr Beweis ist allerdings richtig, wenn hinzugesetzt wird, daß BG und BH mit DB auf einer Seite der aus *D* gezogenen Linie liegt, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Es giebt aber hier auch noch einen andern Beweis. Angenommen, daß Fig. 132 $DBq = DC \times DA$, und F der Mittelpunkt des daselbst befindlichen Kreises ist; so ist, wenn man aus *D* die Tangente *DE*, und außer ihr die Linien *DF*, FE und BF zieht,


2.
A
B
D
C

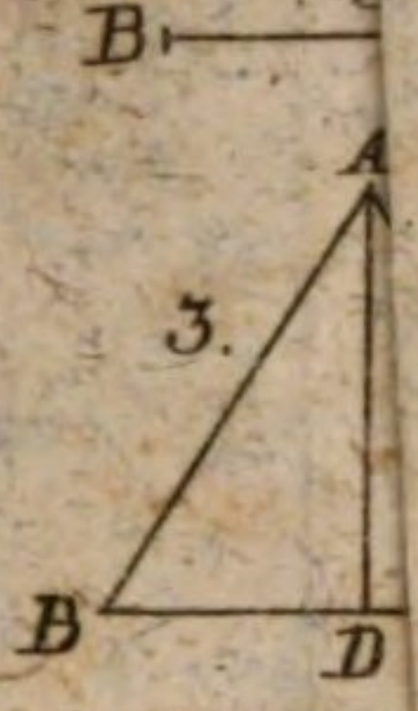
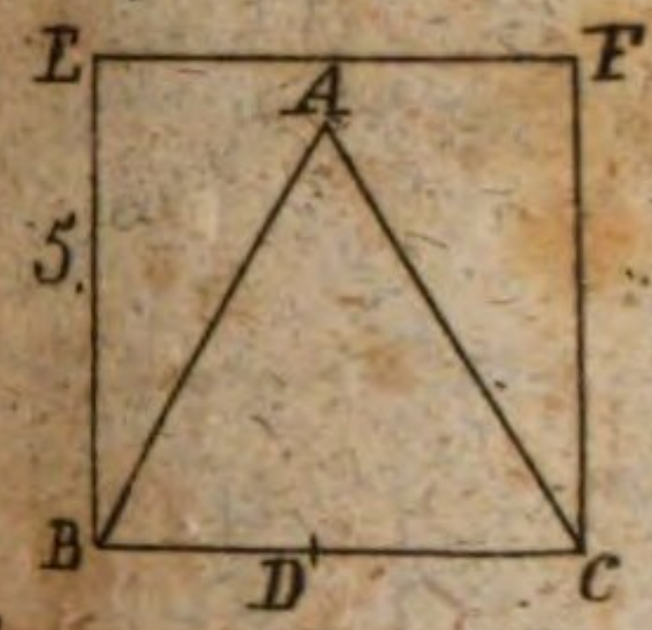
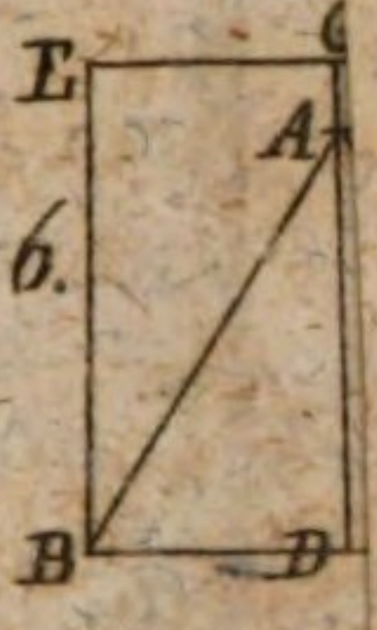
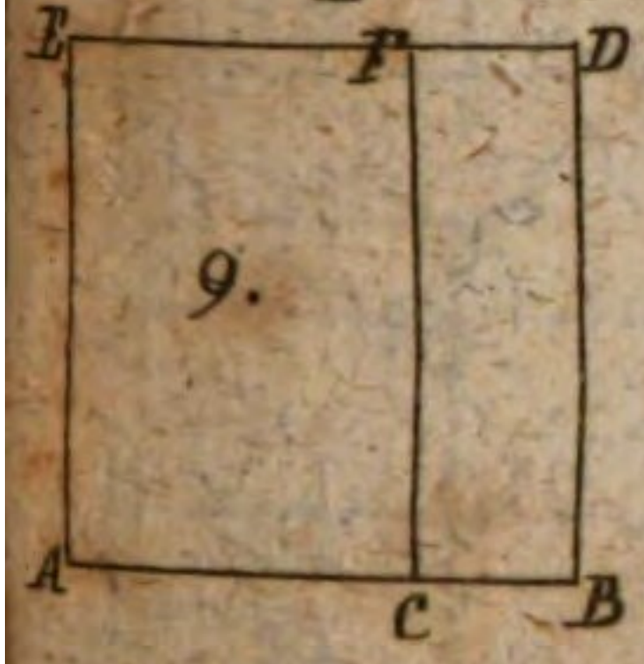


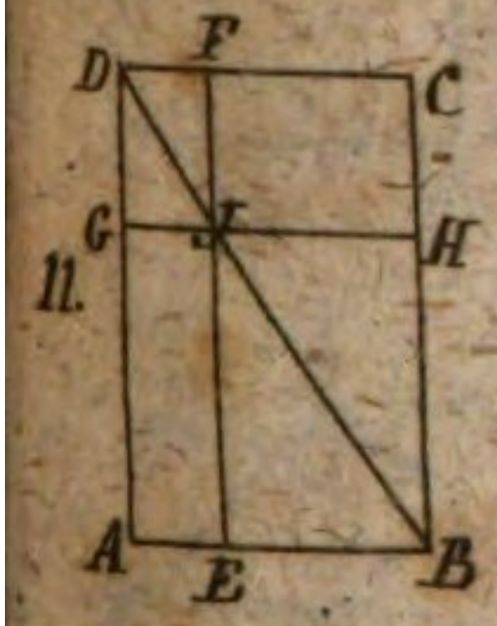
Fig
B
3.
A
B
D

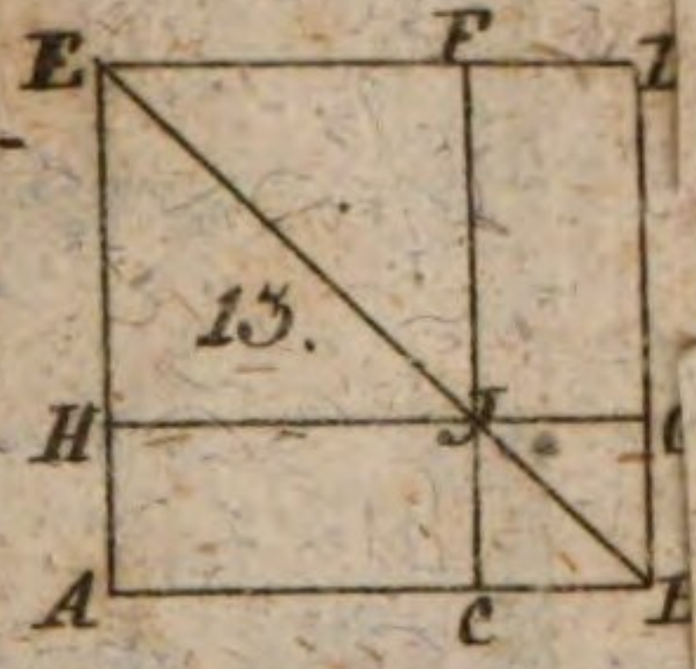

E
F
A
5.
B
D
C

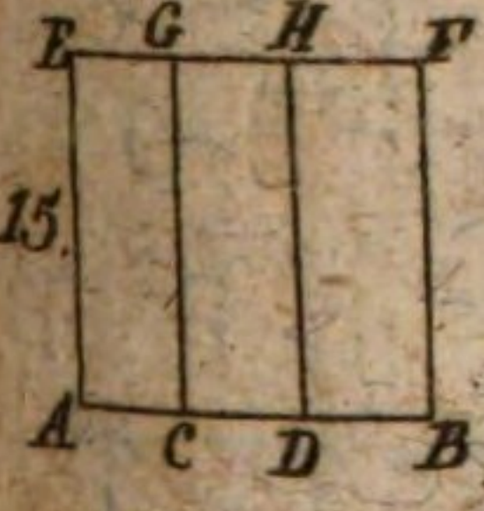

E
A
6.
B
D

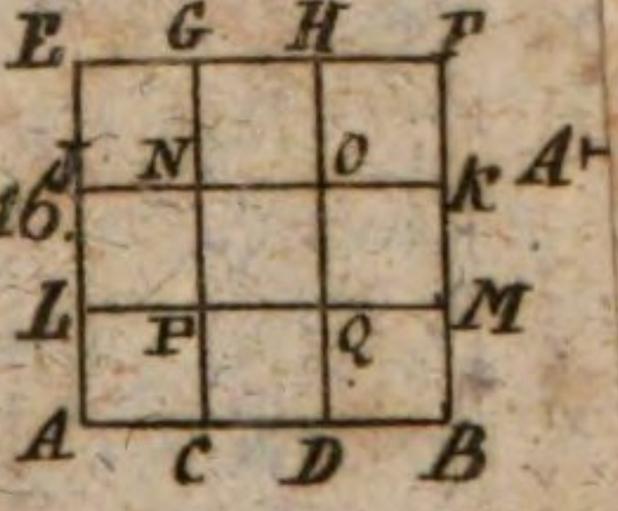

E
F
D
9.
A
C
B

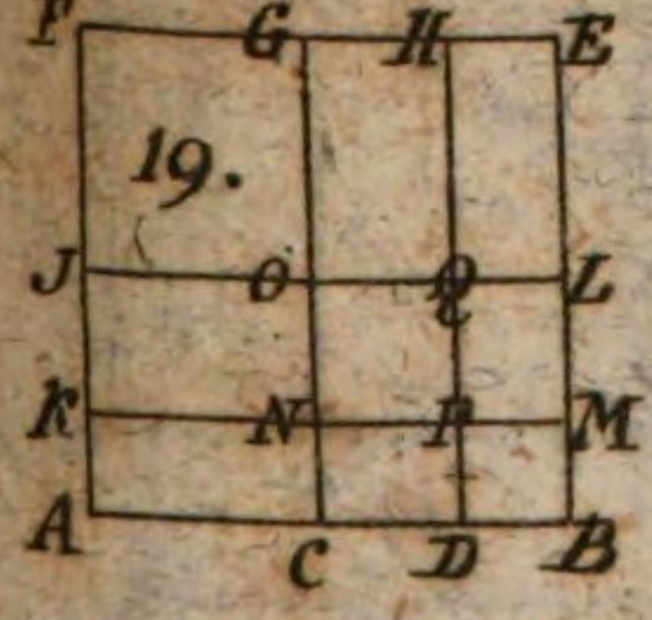
E
F
10.
H
J
A

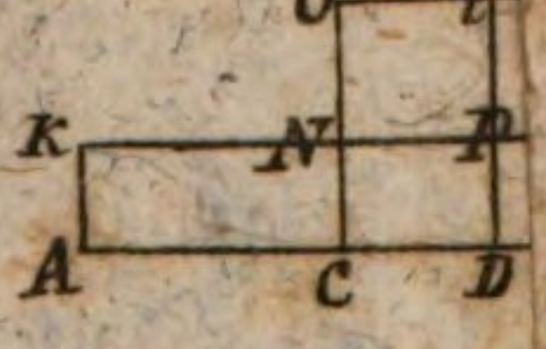

D
F
C
G
H
11.
A
E
B


E
F
13.
H
A
C


E
G
H
F
15.
A
C
D
B


E
G
H
F
N
O
16.
K
L
P
Q
M
A
C
D
B


F
G
H
E
19.
J
O
Q
L
K
N
P
M
A
C
D
B


20.
O
Q
K
N
P
A
C
D

E. Wenn DB nicht die Tangente ist, die aus dem Punkte D gezogen werden kann, so ist eine andere aus D gezogene Linie, die den Kreis oberhalb oder unterhalb B trifft, diese Tangente, und dann im ersten Falle Fig. 131 DG < DB und im zweyten DH > DB. Wenn das ist, so ist im ersten Falle nach dem vorhergehenden Satze

$$DC \times DA = DGq.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DBq$$

seyn soll, so müßte

$$DGq = DBq$$

und also

$$DG = DB$$

seyn, welches unmöglich ist. Im zweyten Falle aber wäre

$$DC \times DA = DHq.$$

Da nun auch

$$DC \times DA = DBq,$$

so müßte

$$DHq = DBq$$

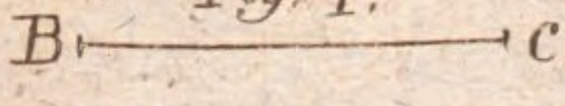
und also

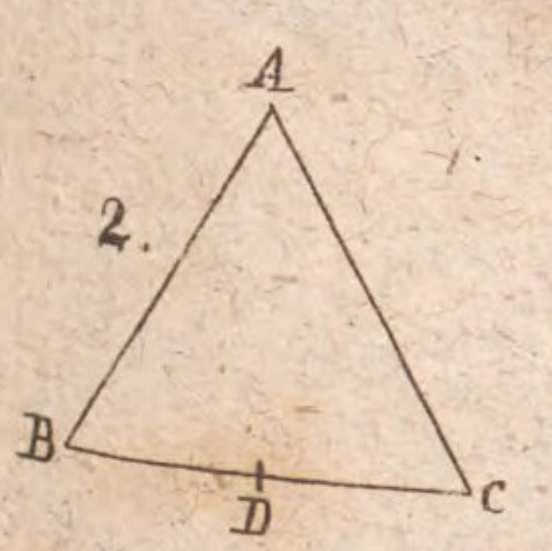
$$DH = DB$$

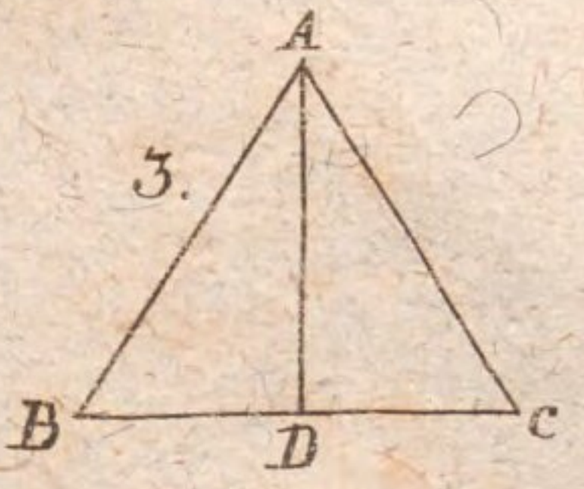
seyn, welches ebenfalls dem widerstreitet, daß DH > DB wäre.

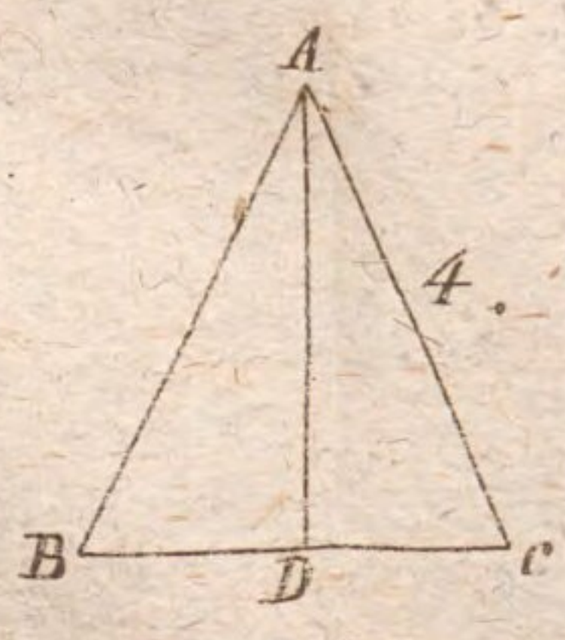
L. Sie haben diesen umgekehrten Satz so bewiesen, wie wir bisher alle umgekehrten Sätze bewiesen haben, und ihr Beweis ist allerdings richtig, wenn hinzugesetzt wird, daß BG und BH mit DB auf einer Seite der aus *D* gezogenen Linie liegt, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Es giebt aber hier auch noch einen andern Beweis. Angenommen, daß Fig. 132 $DBq = DC \times DA$, und F der Mittelpunkt des daselbst befindlichen Kreises ist; so ist, wenn man aus *D* die Tangente *DE*, und außer ihr die Linien *DF*, FE und BF zieht,

Fig. 1.

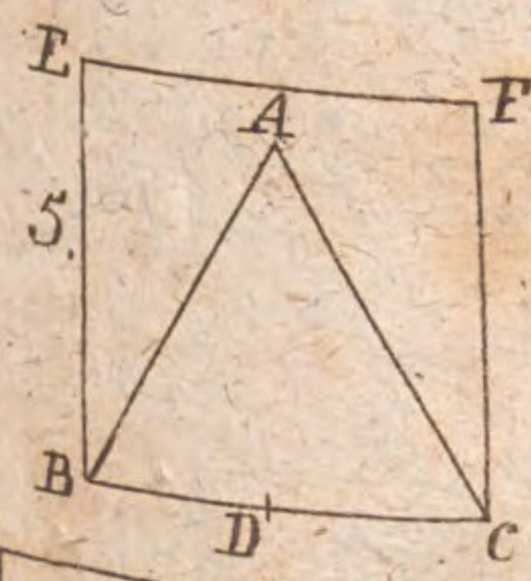

B
C

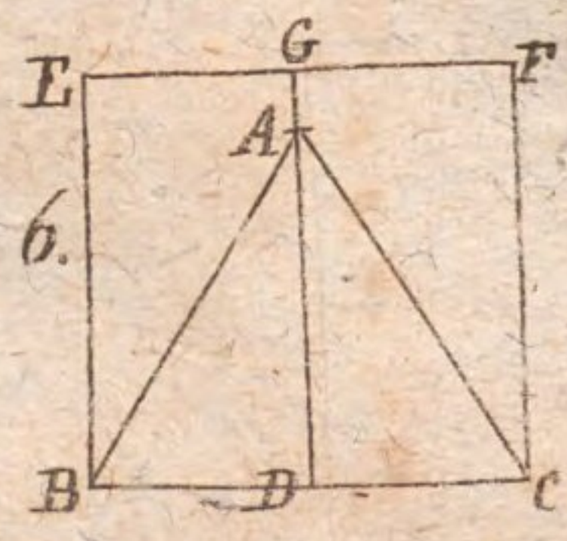

A
2.
B
D
C

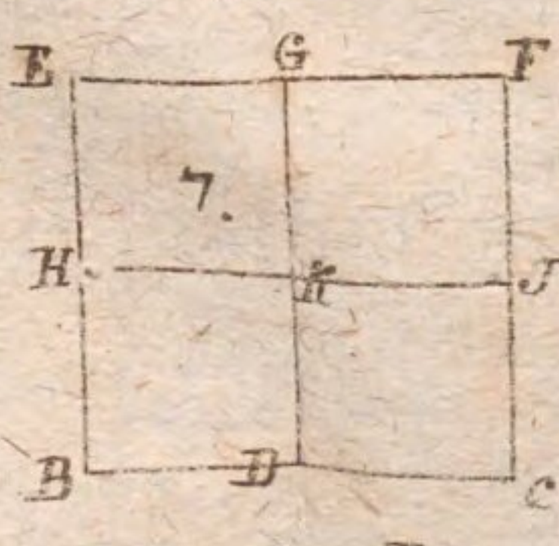

A
3.
B
D
C

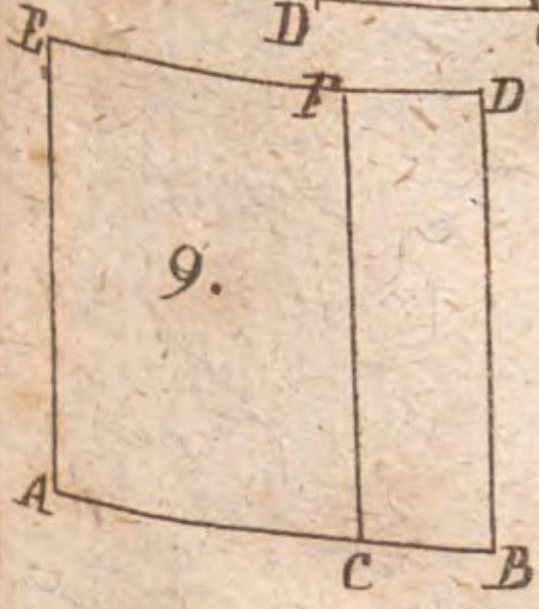

A
4.
B
D
C

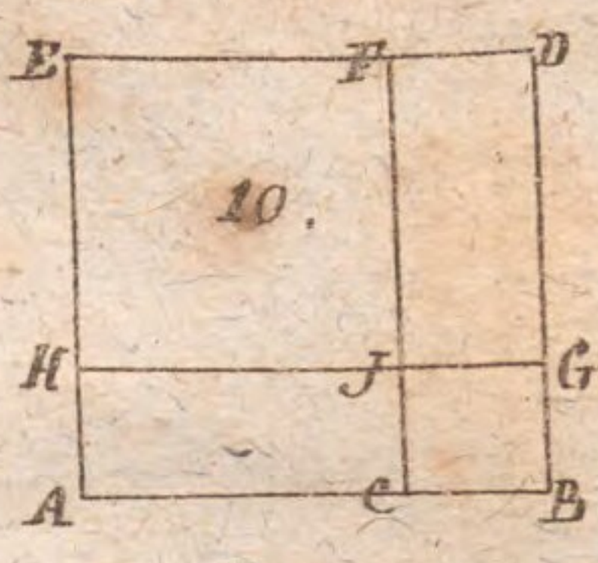
A
8.
C
B

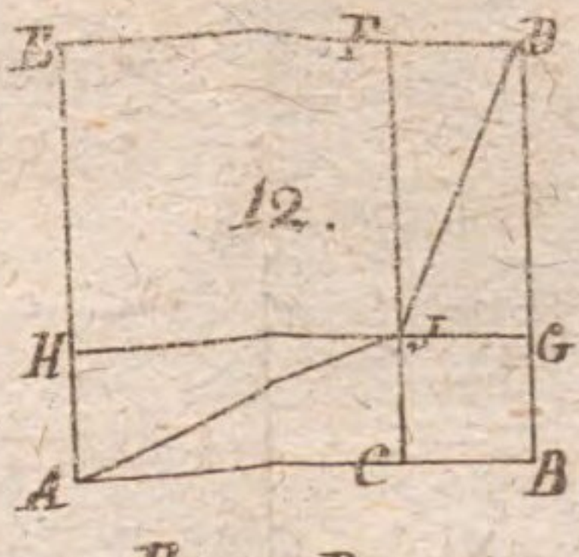

E
F
A
5.
B
D
C

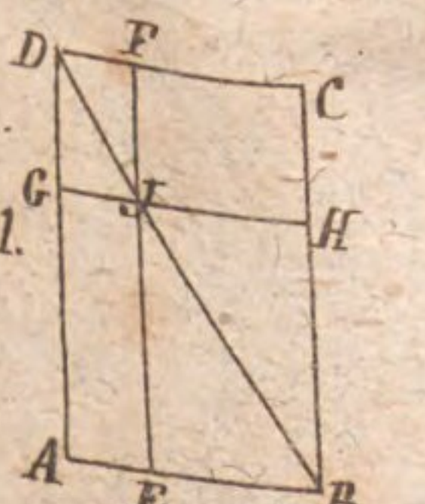

G
E
F
A
6.
B
D
C

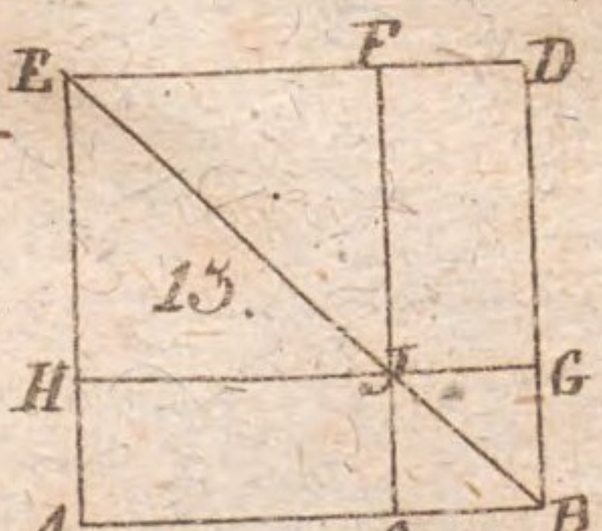

E
G
F
7.
H
K
J
B
D
C

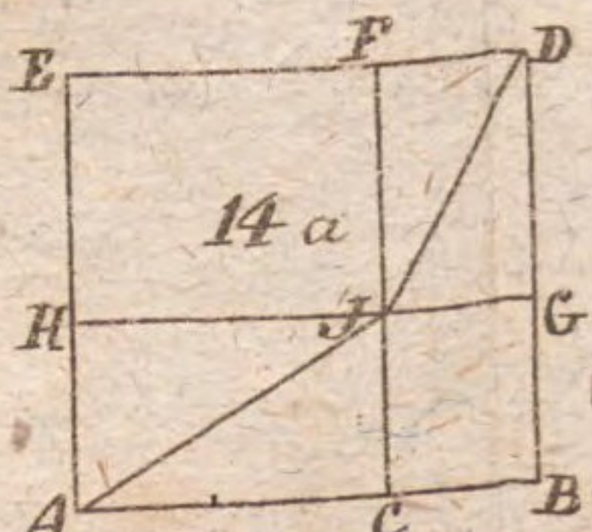

E
F
D
9.
A
C
B

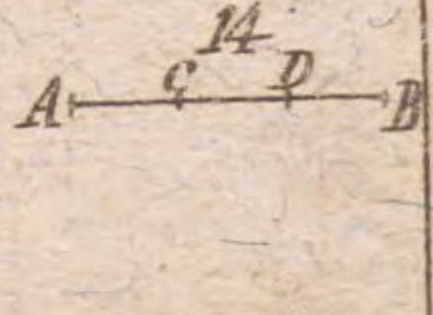

E
F
D
10.
H
J
G
A
C
B

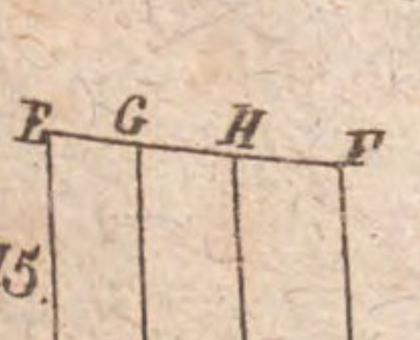

E
F
D
12.
H
J
G
A
C
B

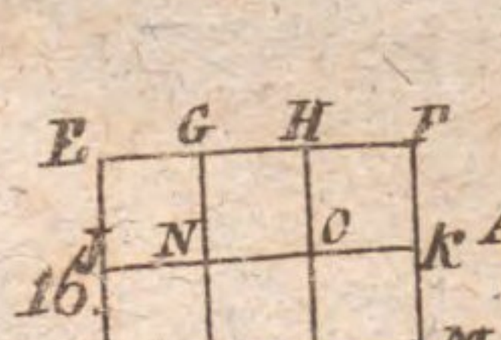

D
F
C
11.
G
J
H
A
E
B

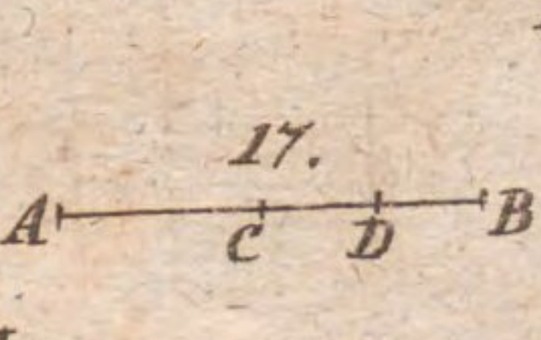

E
F
D
13.
H
J
G
A
C
B

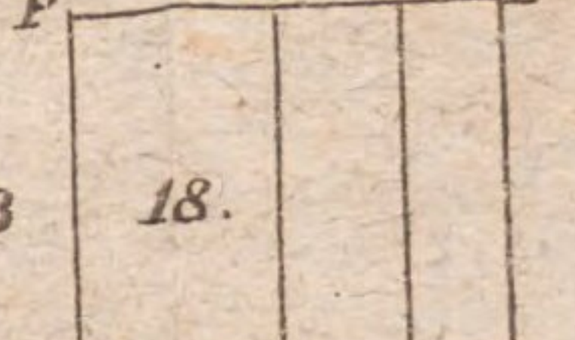

E
F
D
14 a
H
J
G
A
C
B

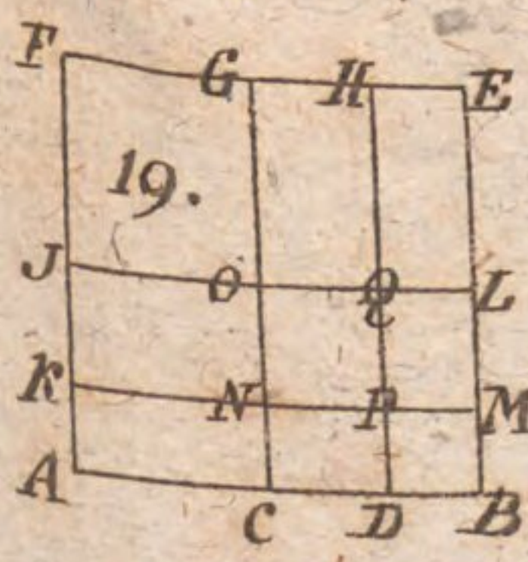

14.
A
C
D
B

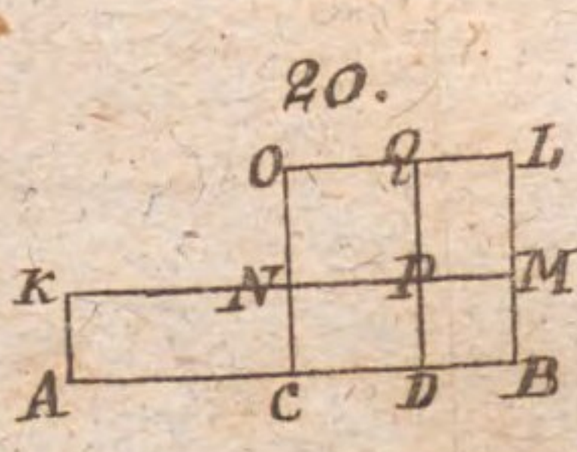

E
G
H
F
15.
A
C
D
B

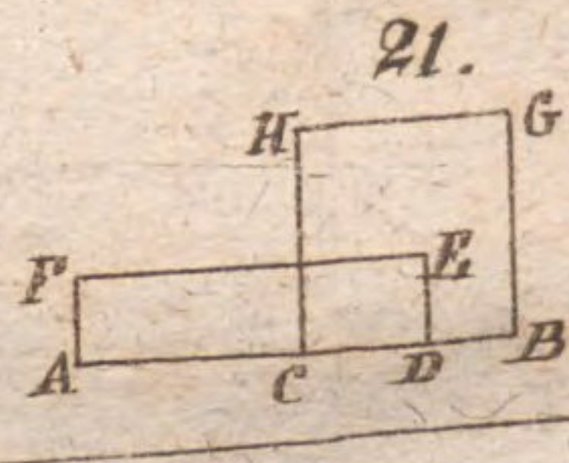

E
G
H
F
J
N
O
K
16.
L
P
Q
M
A
C
D
B


17.
A
C
D
B

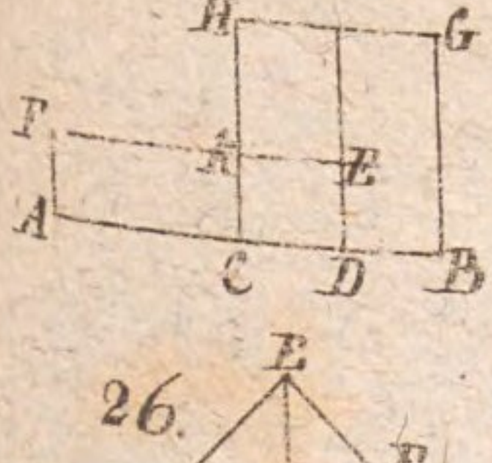

F
G
H
E
18.
A
C
D
B


F
G
H
E
19.
J
O
Q
L
K
N
P
M
A
C
D
B

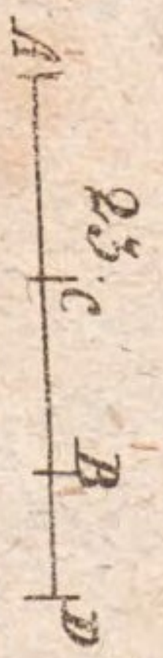

20.
O
Q
L
K
N
P
M
A
C
D
B


21.
H
G
F
E
A
C
D
B

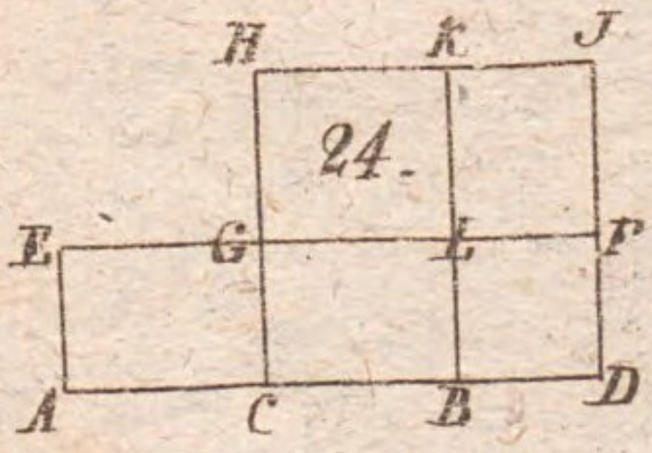
22.



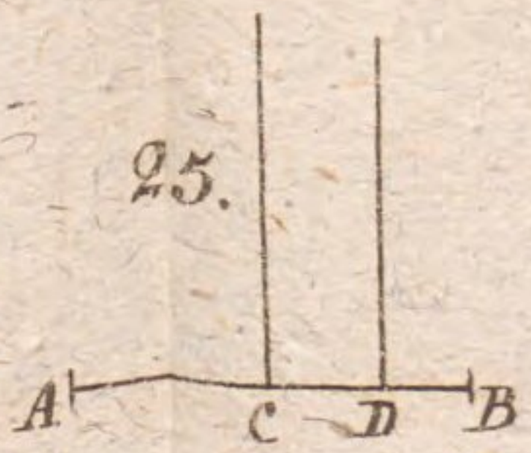
23.



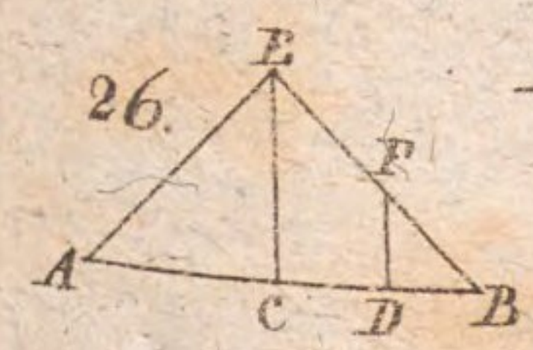
24.



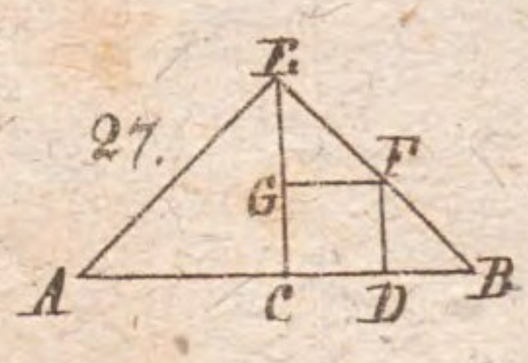
25.



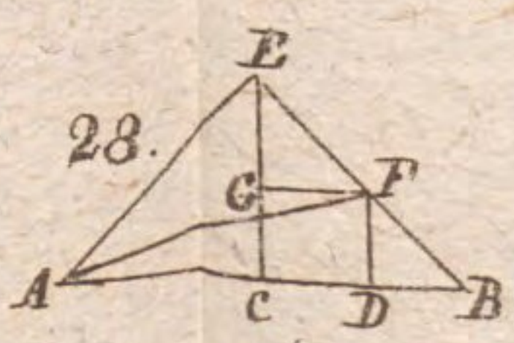
26.



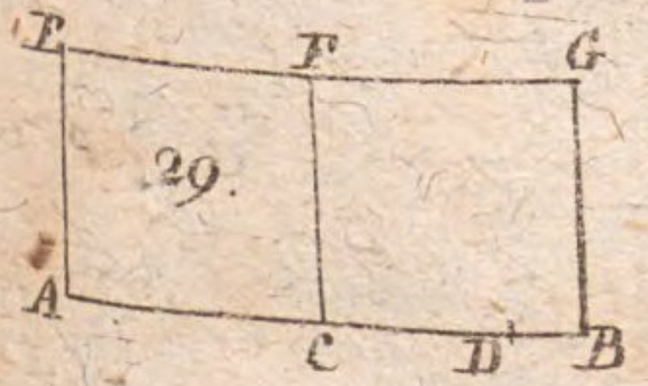
27.



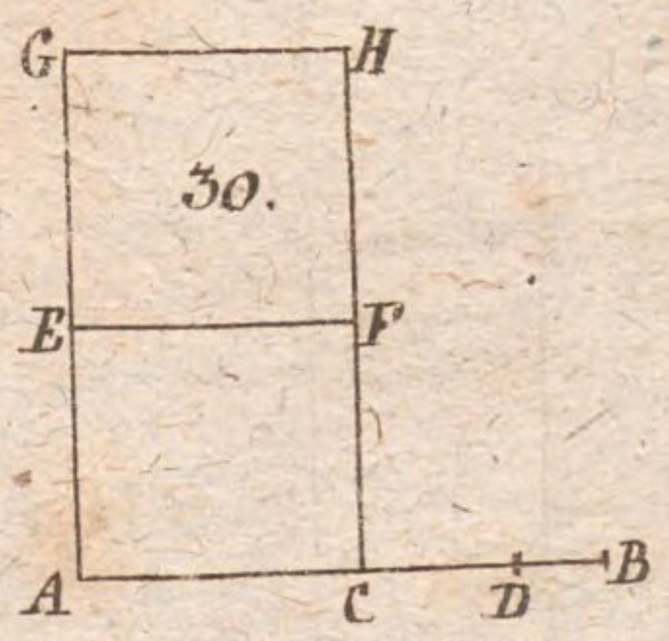
28.



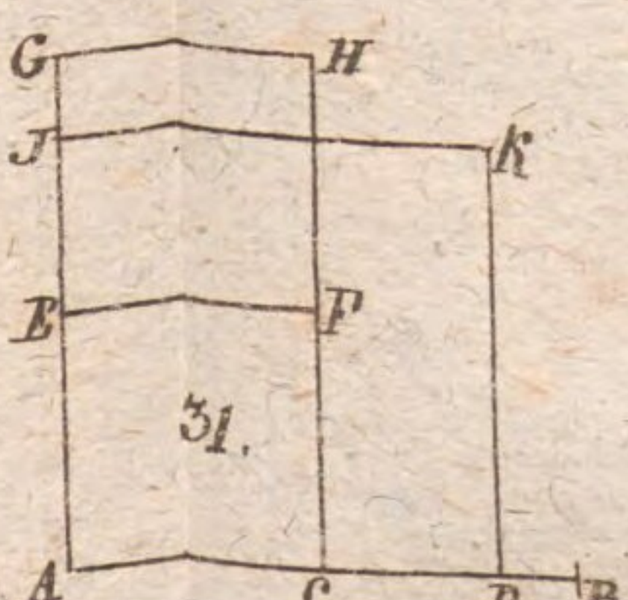
29.



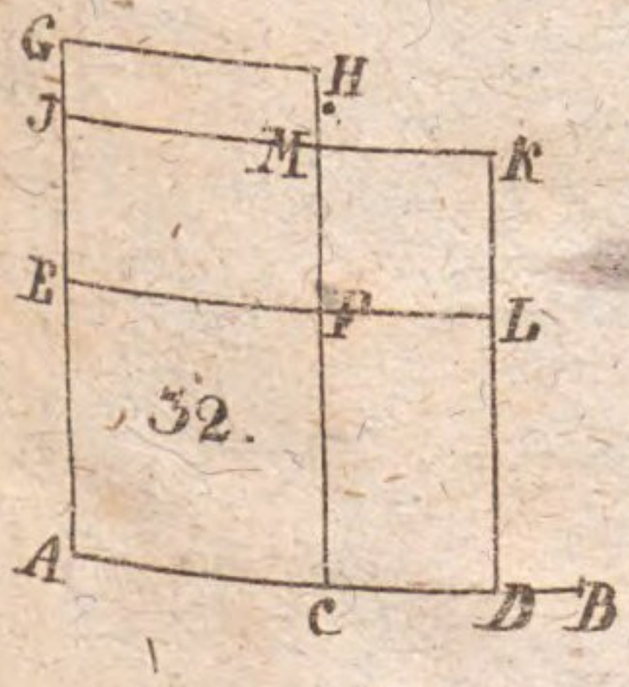
30.



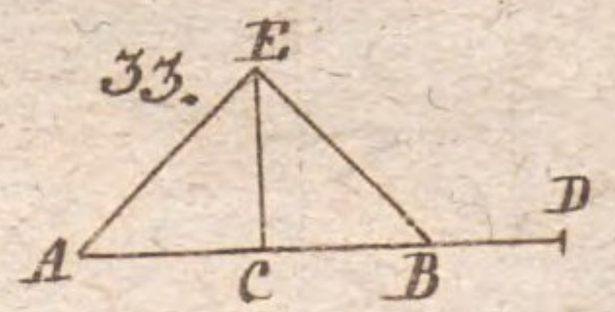
31.



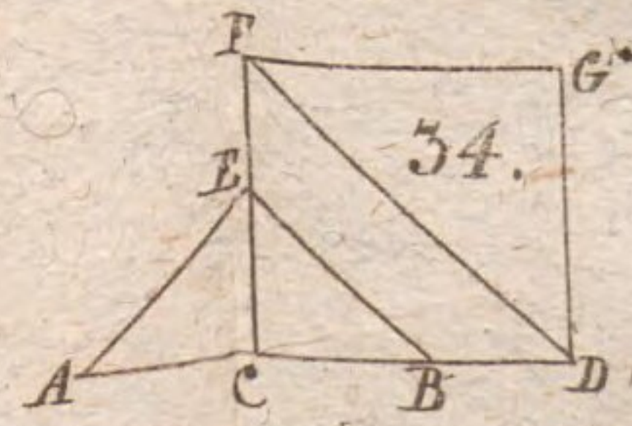
32.



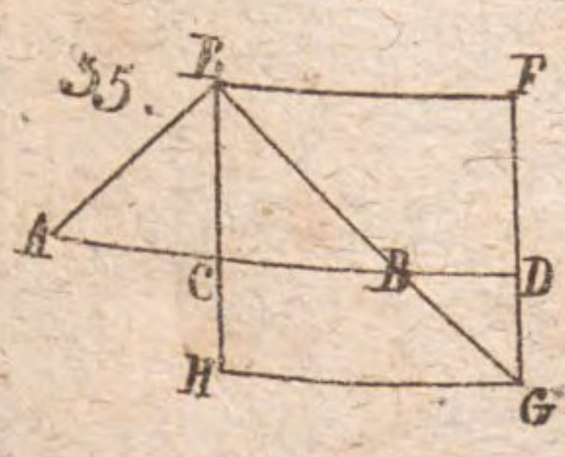
33.



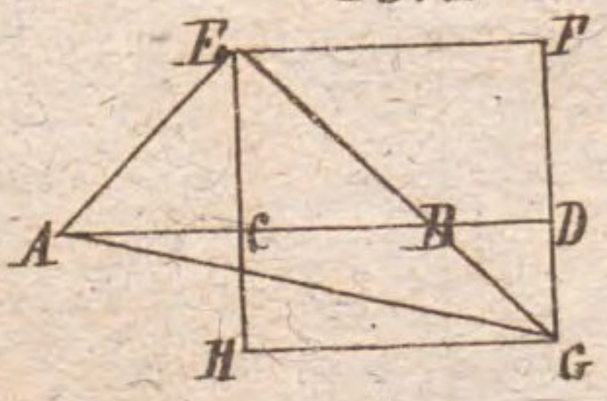
34.



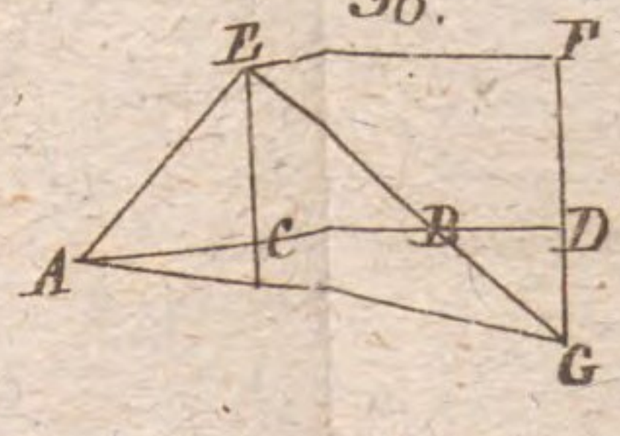
35.



35. a

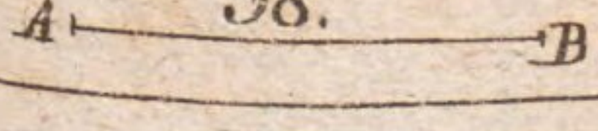


36.

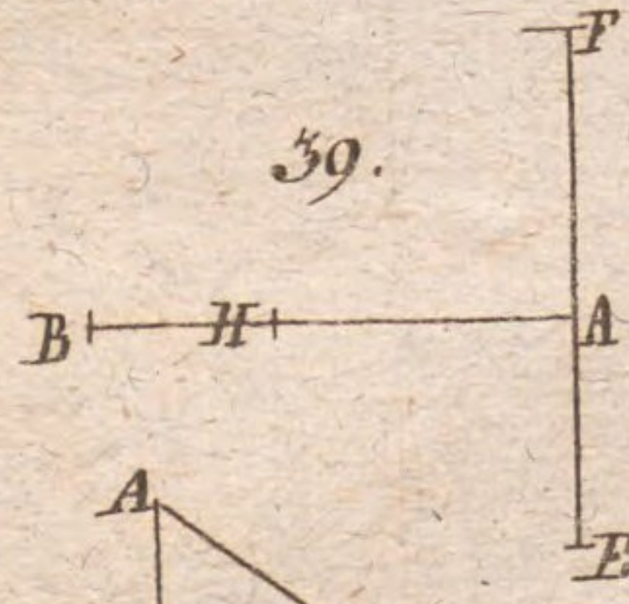


37.

38.



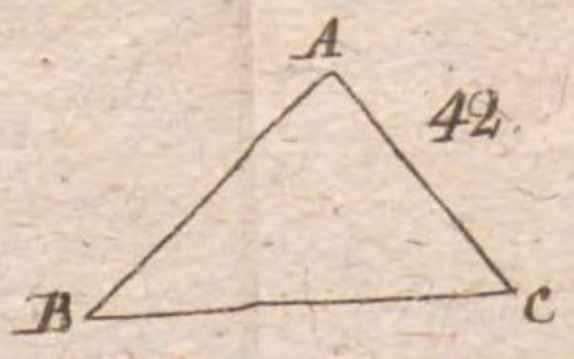
39.



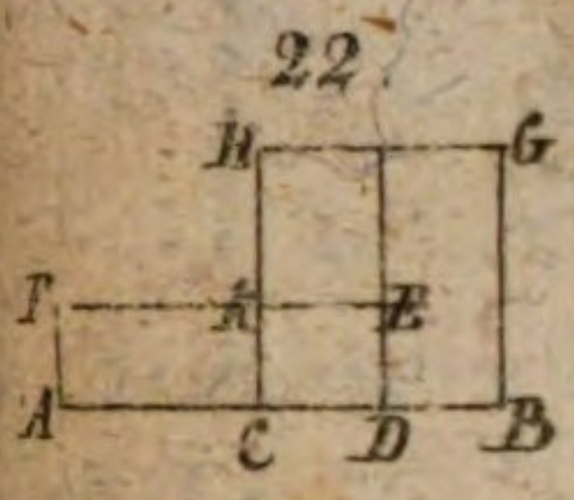
40.

41.

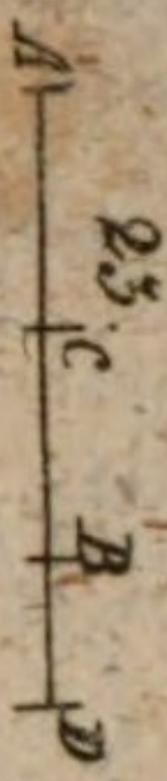
42.

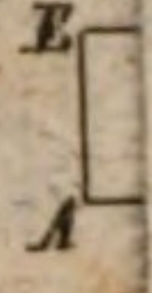


22.

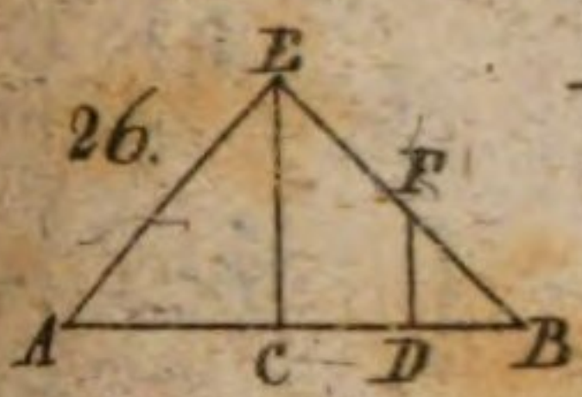


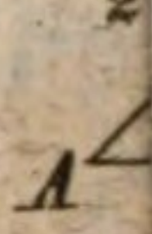
23.



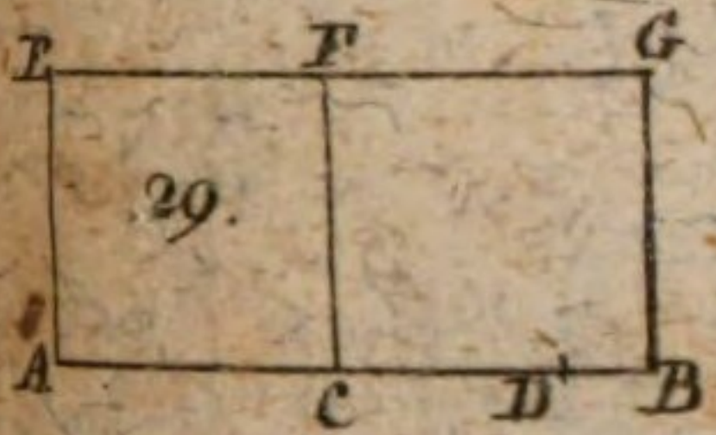


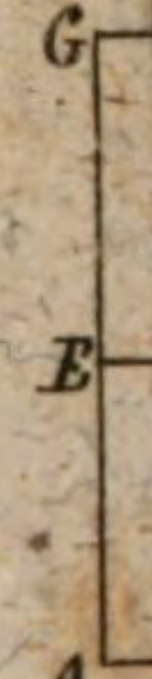
26.



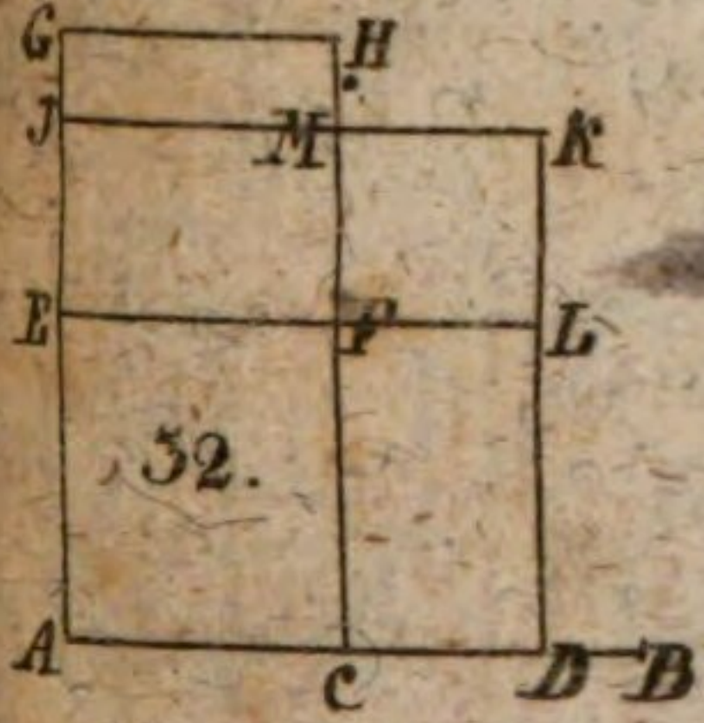


29.

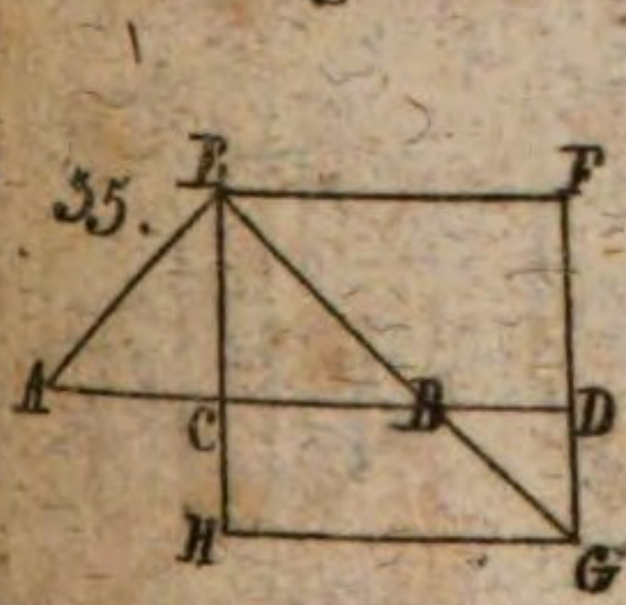


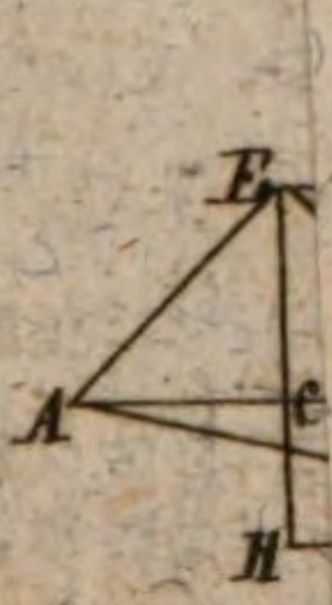


32.

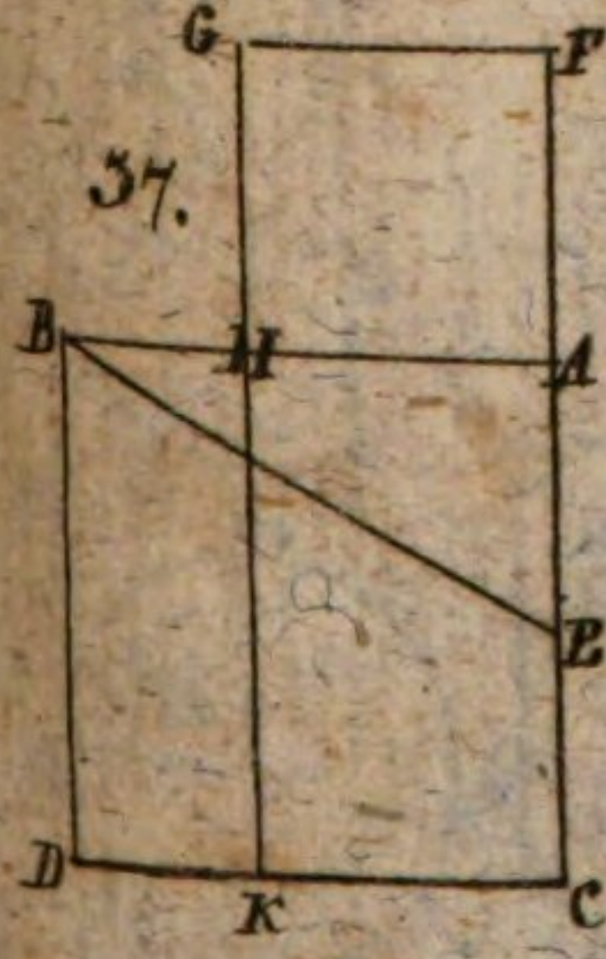


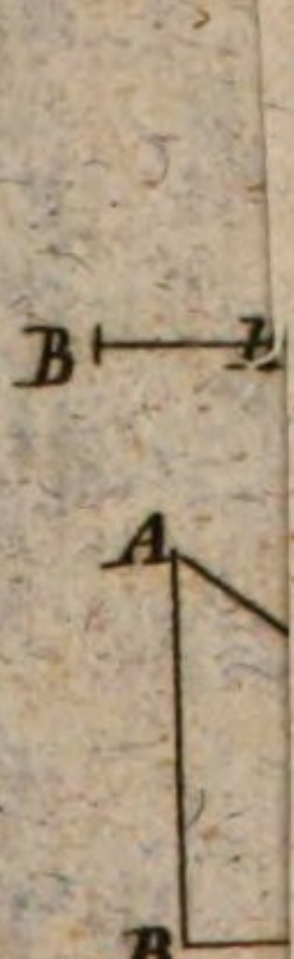
35.



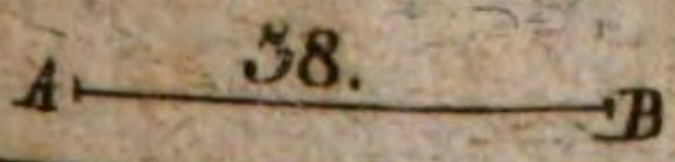


37.

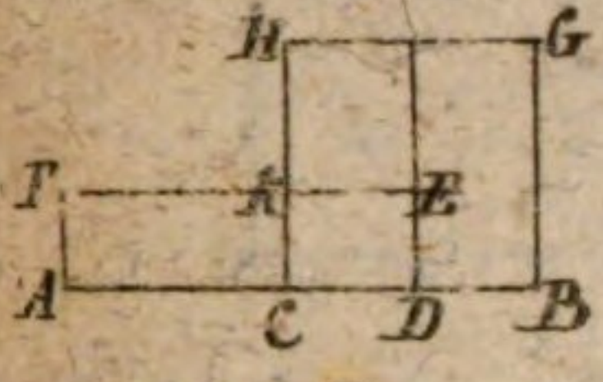




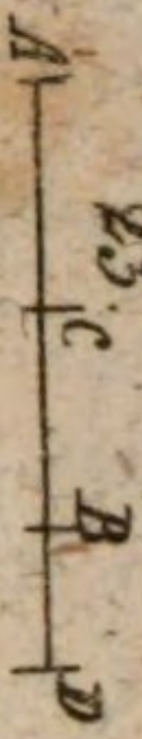
38.



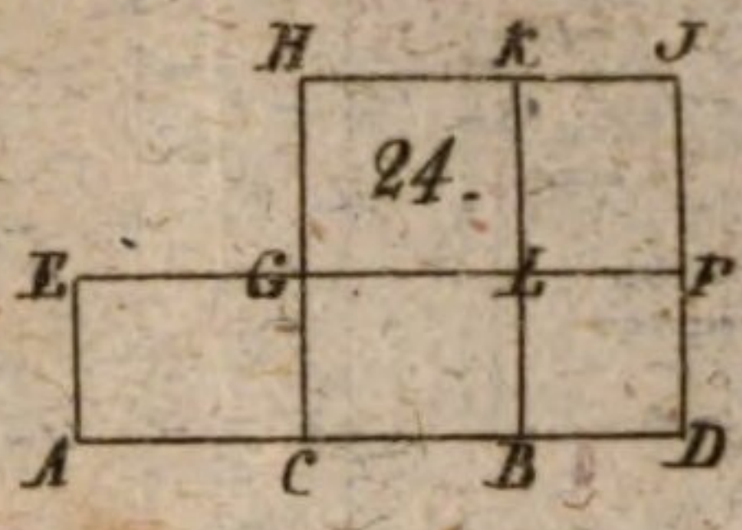
22.



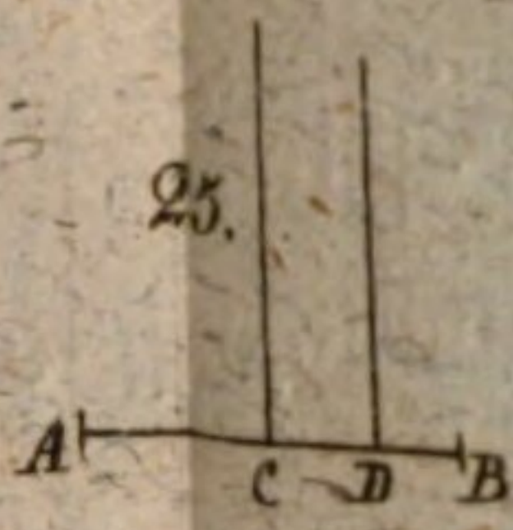
23.



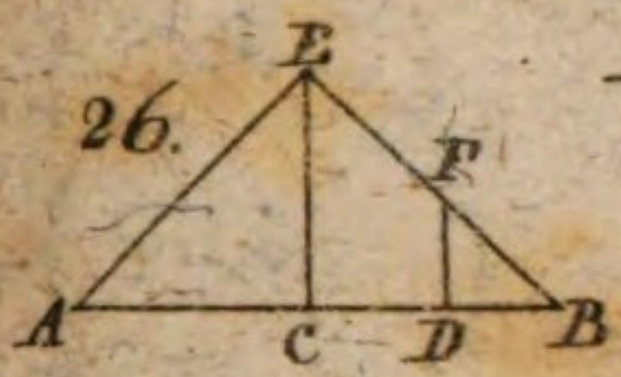
24.



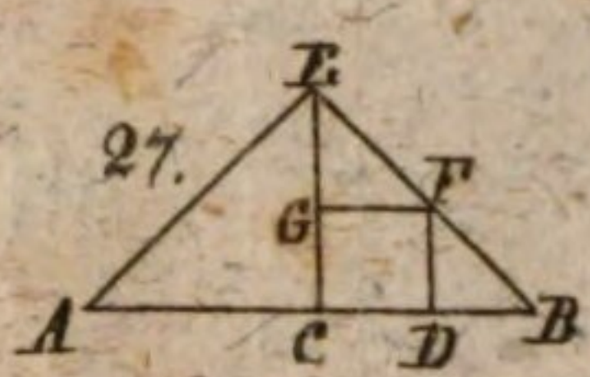
25.



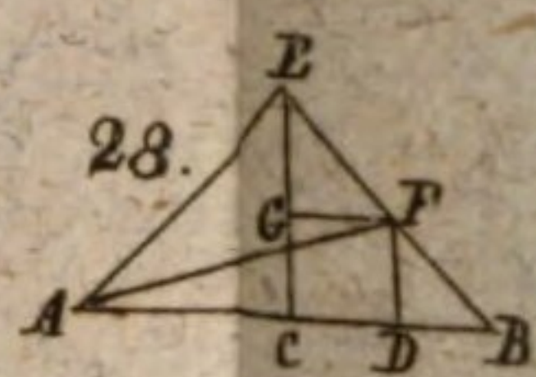
26.



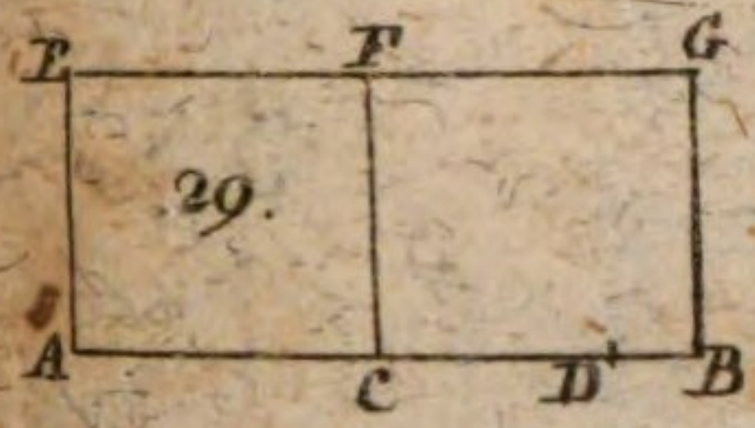
27.



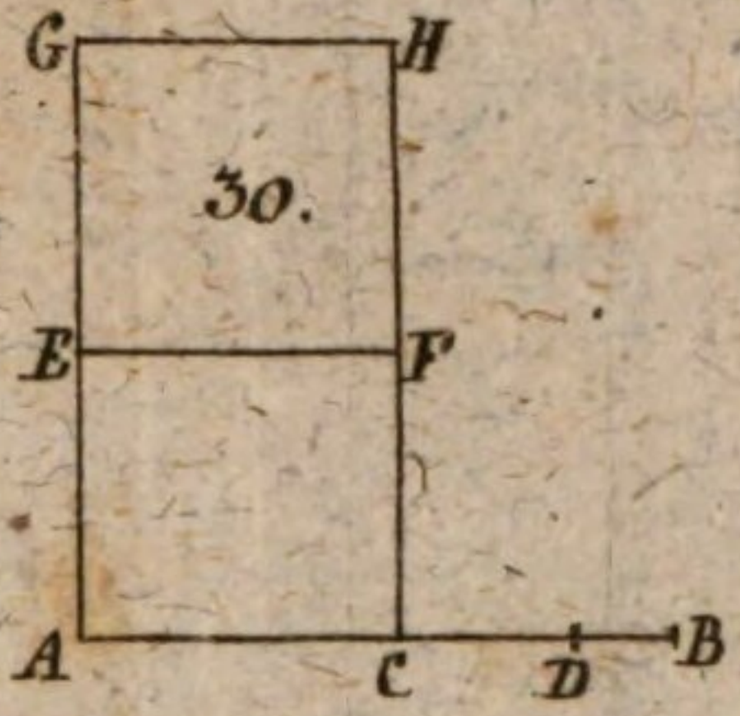
28.



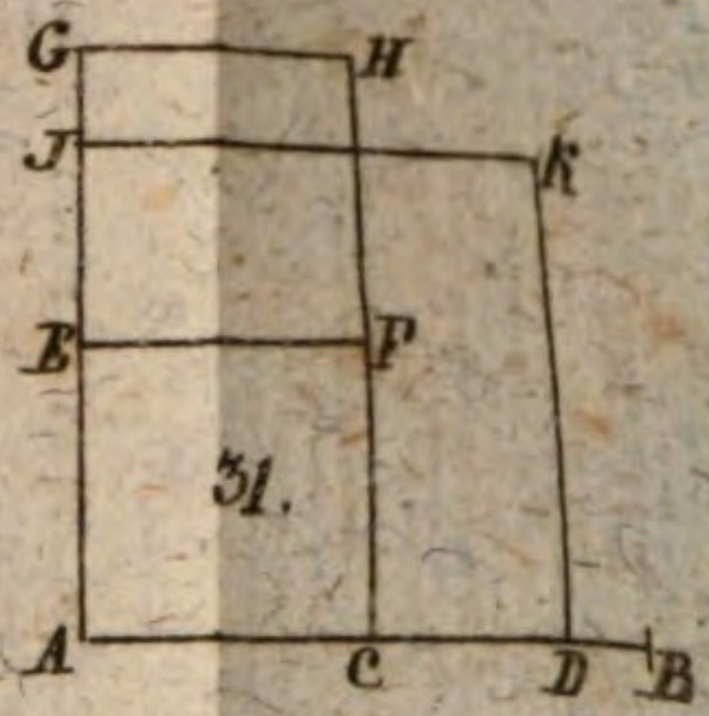
29.



30.

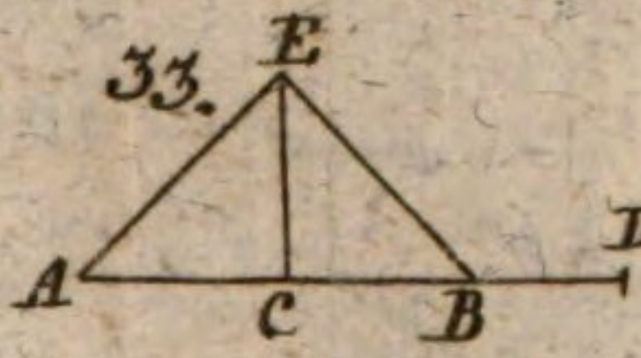


31.

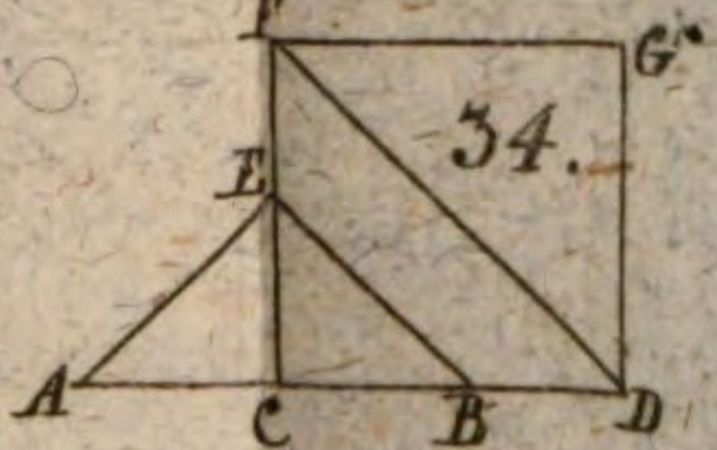


32.

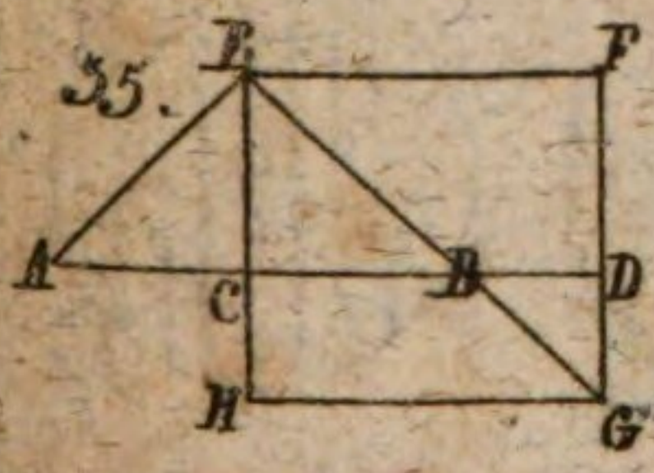
33.



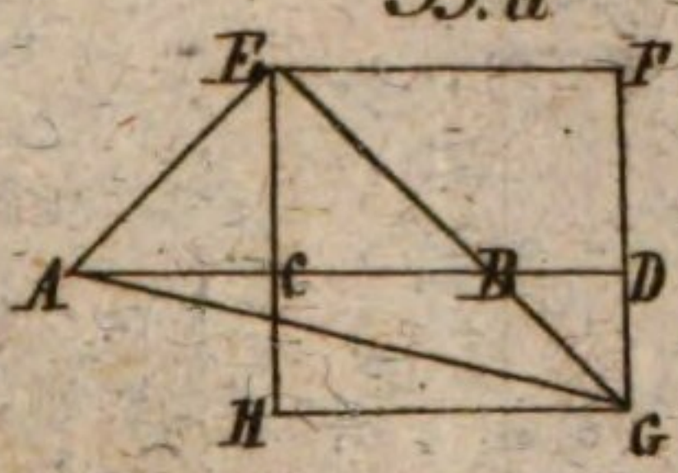
34.



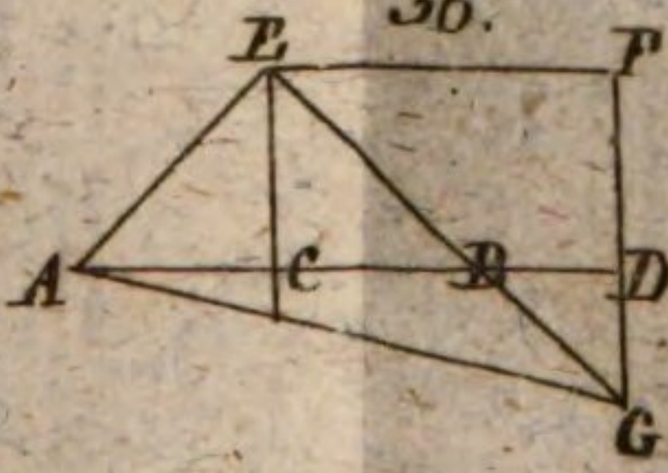
35.



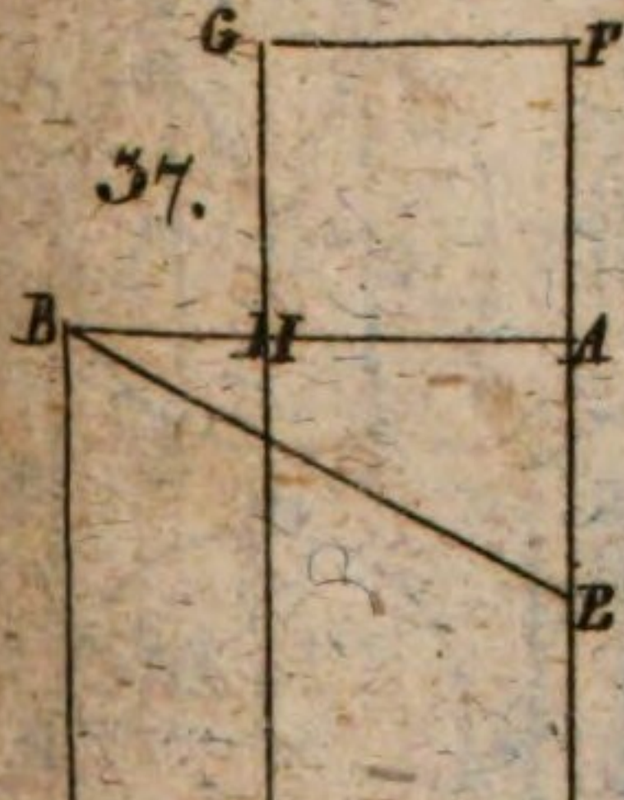
35. a



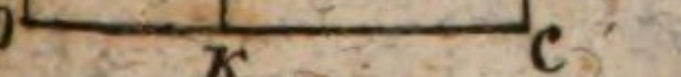
36.



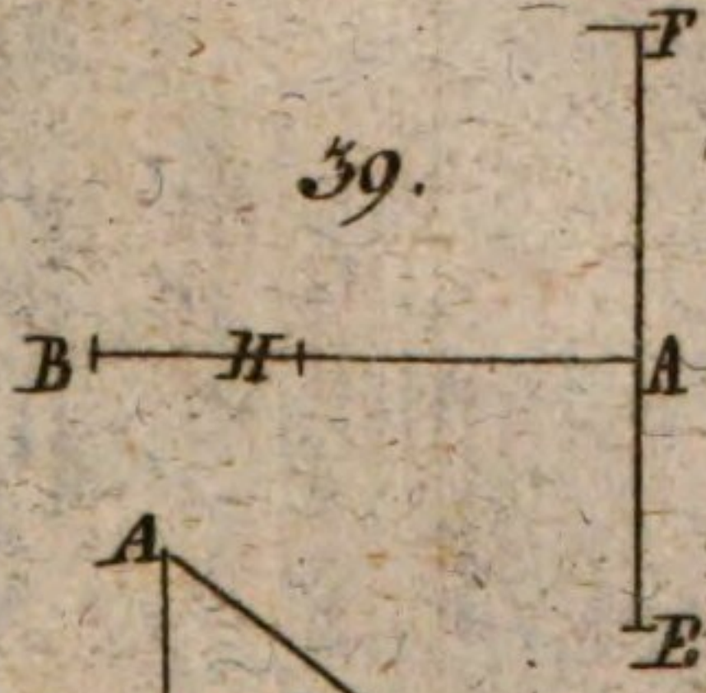
37.



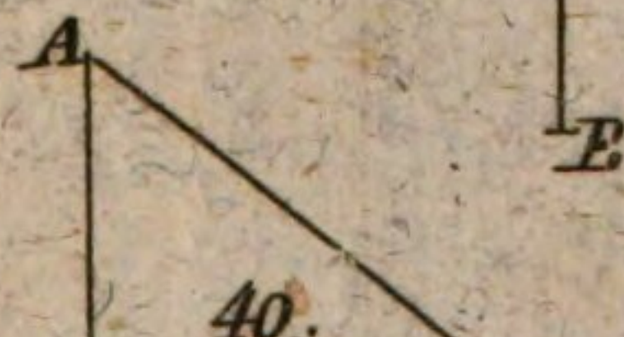
38.



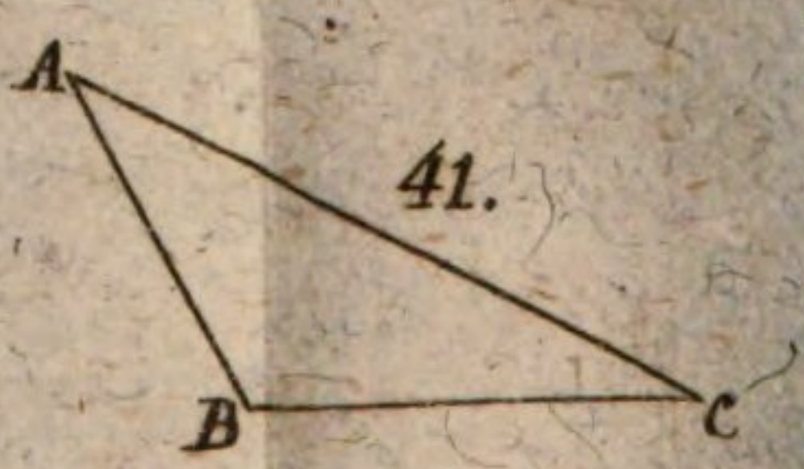
39.



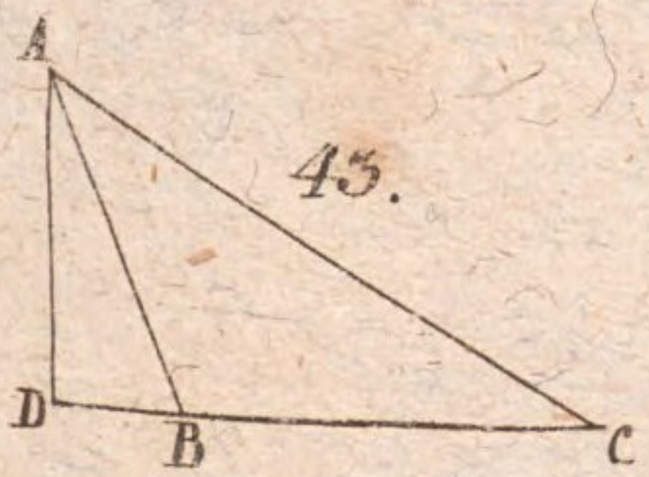
40.



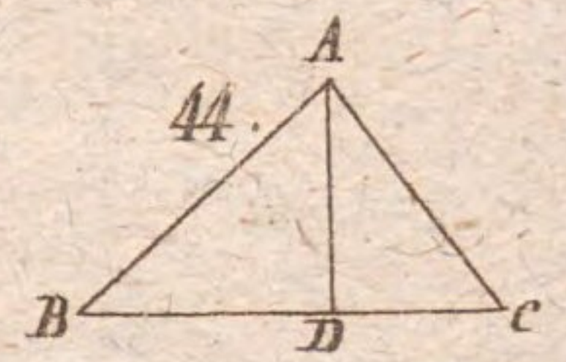
41.



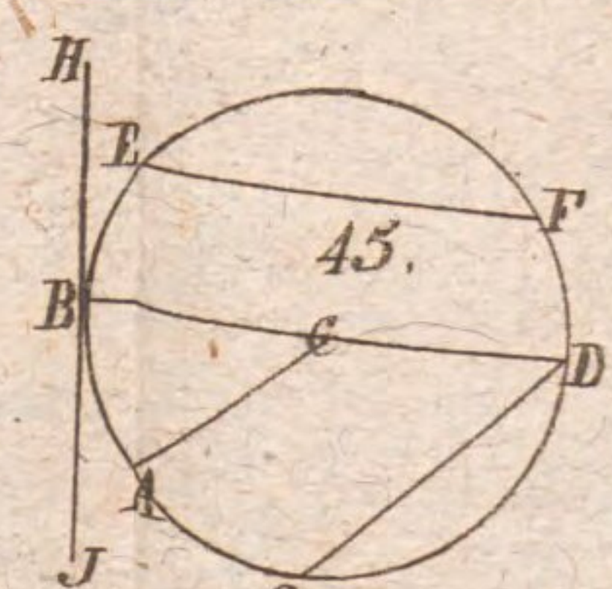
42.



43.

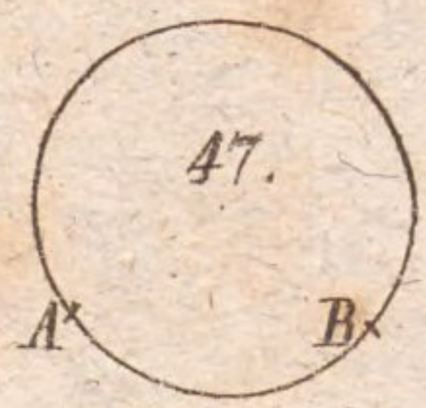


44.

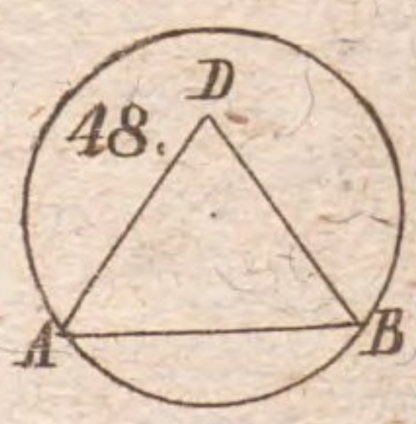


45.

46.



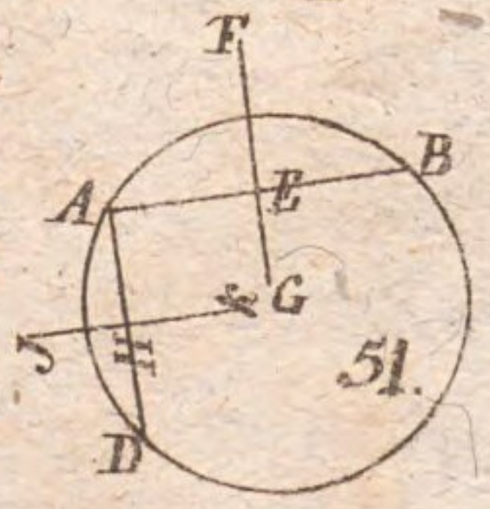
47.



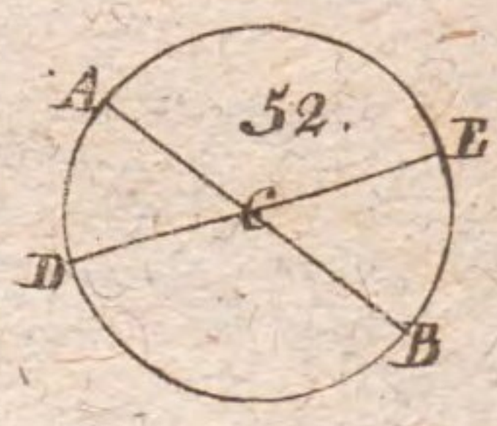
48.

49.

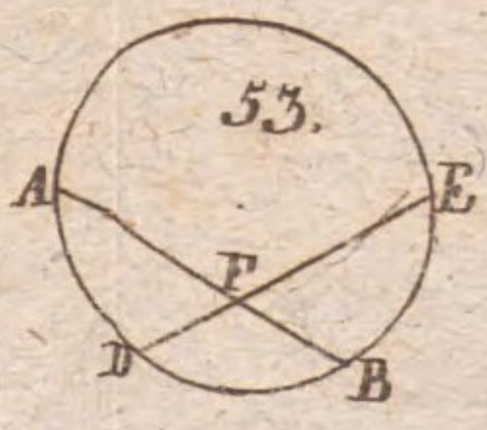
50.



51.

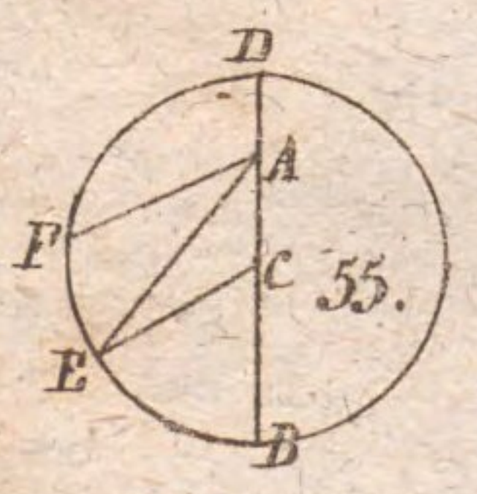


52.

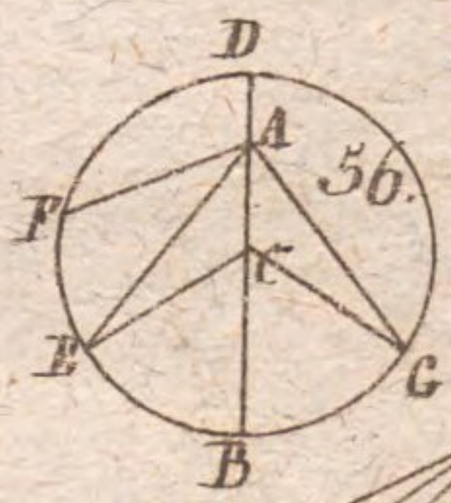


53.

54.

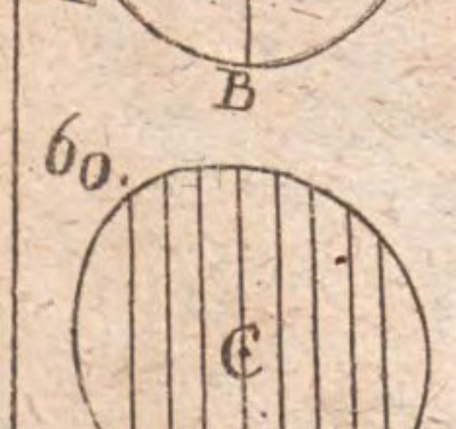


55.

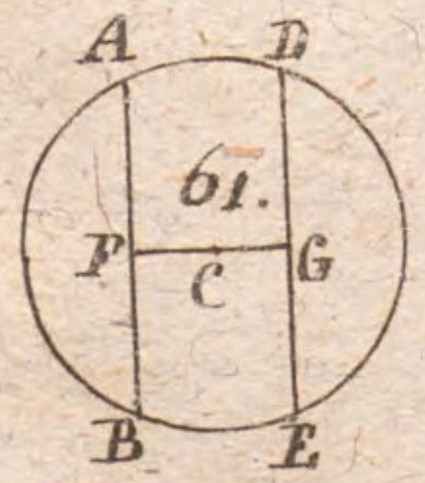


56.

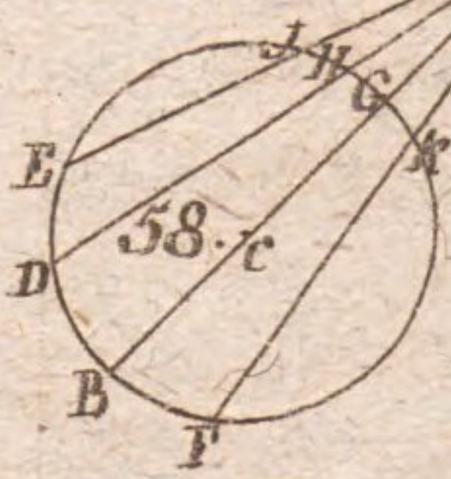
57.



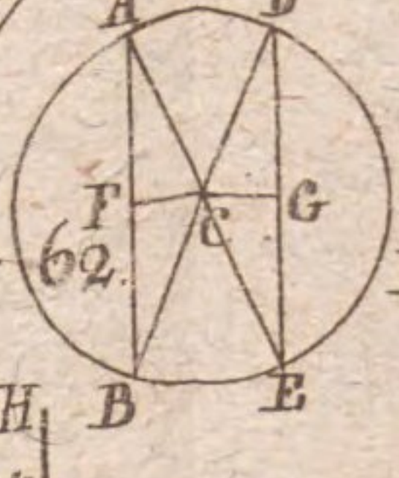
60.



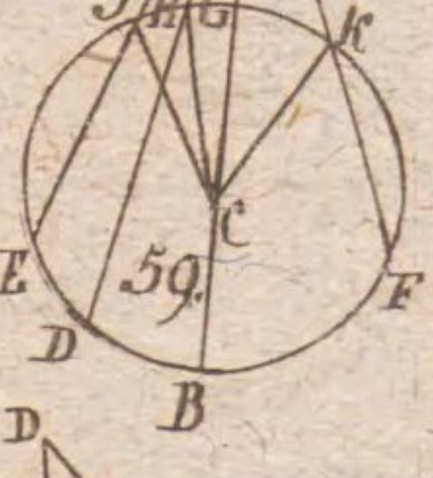
61.



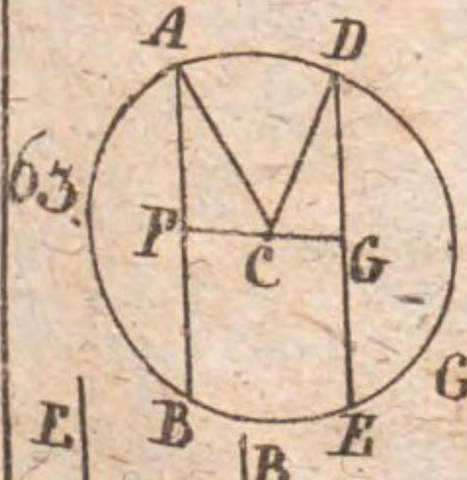
58.



62.

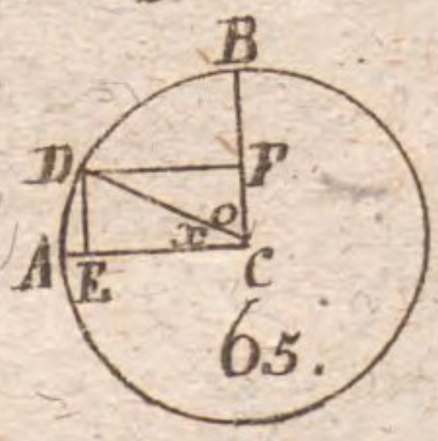


59.

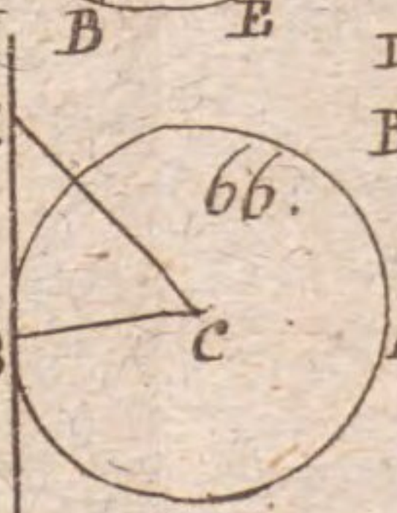


63.

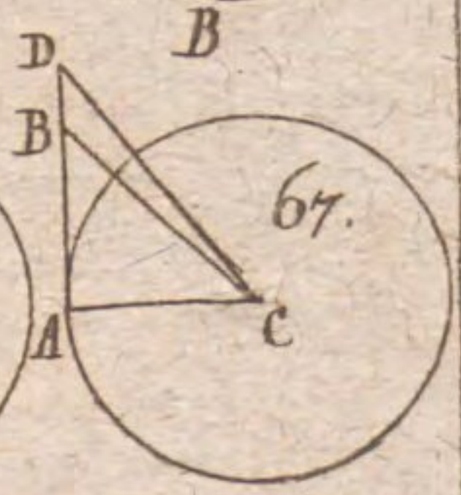
64.



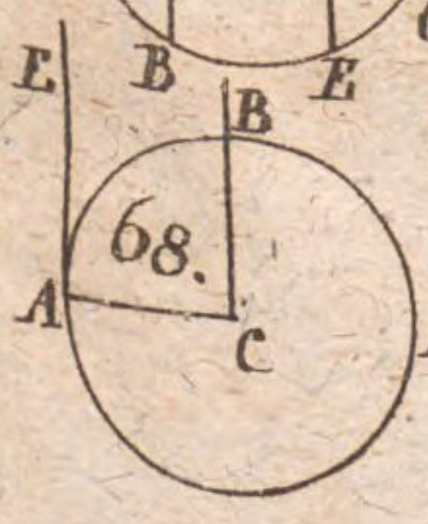
65.



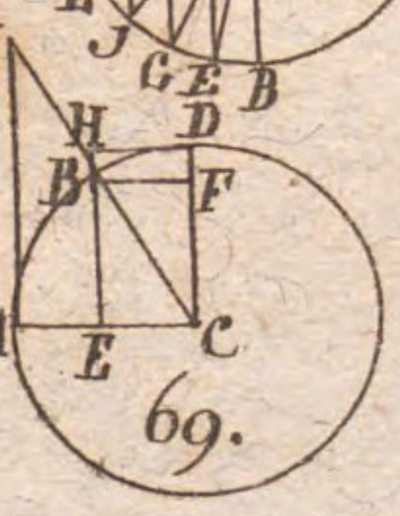
66.



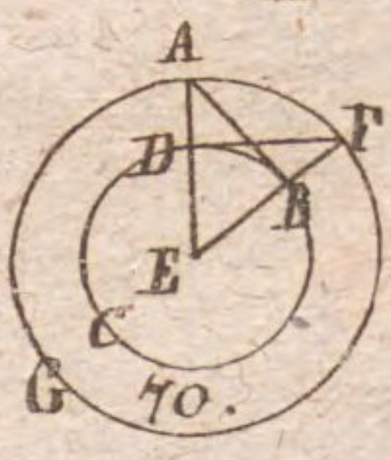
67.



68.

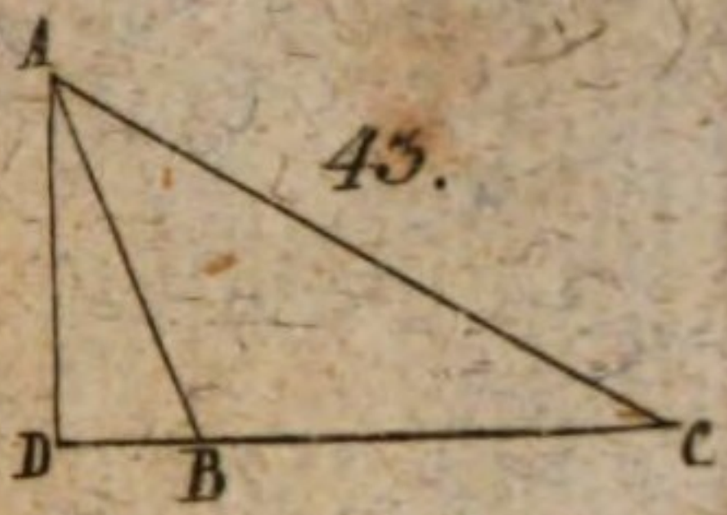


69.



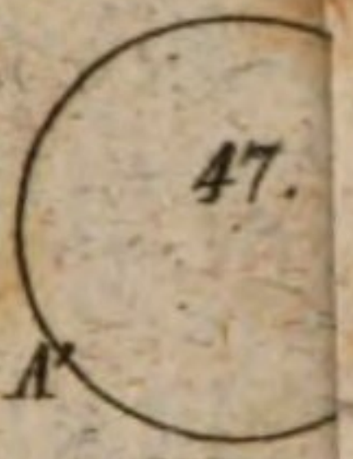
70.

71.



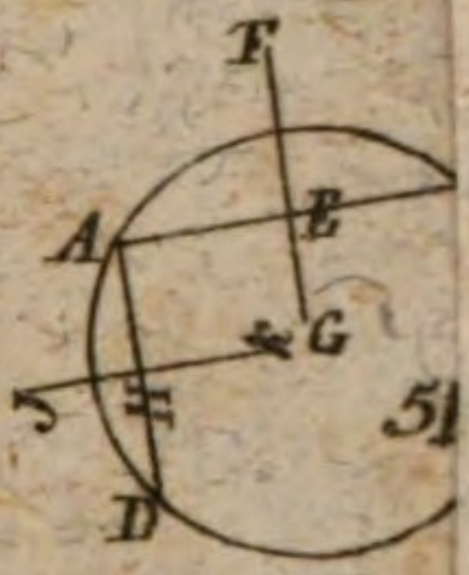
43.

46.



47.

50.



51.

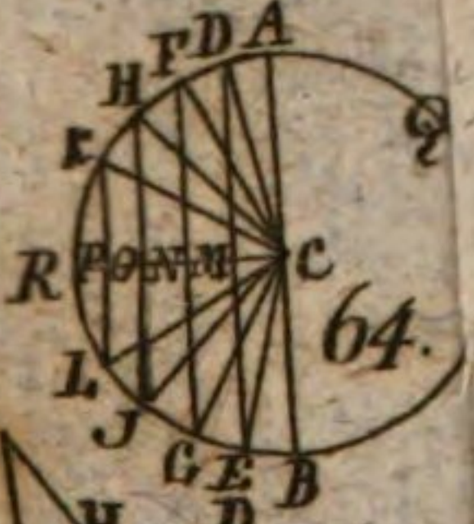
54.

55.

60.

61.

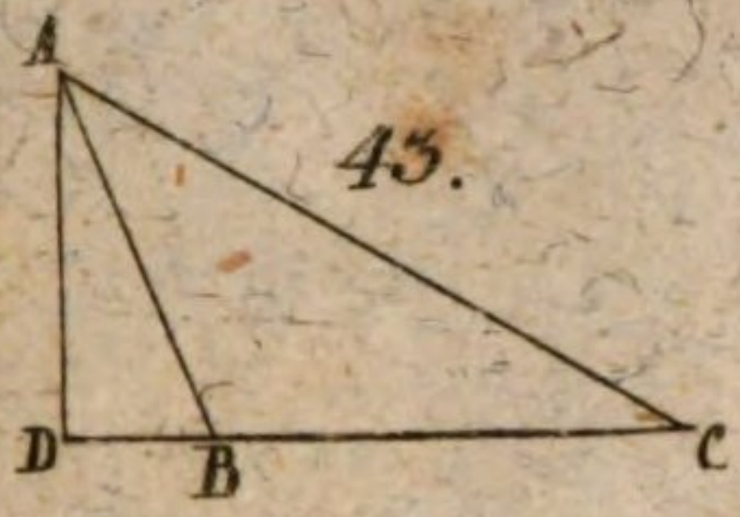
63.



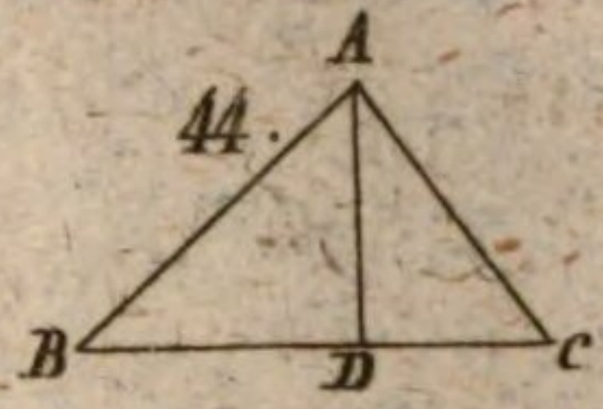
64.

68.

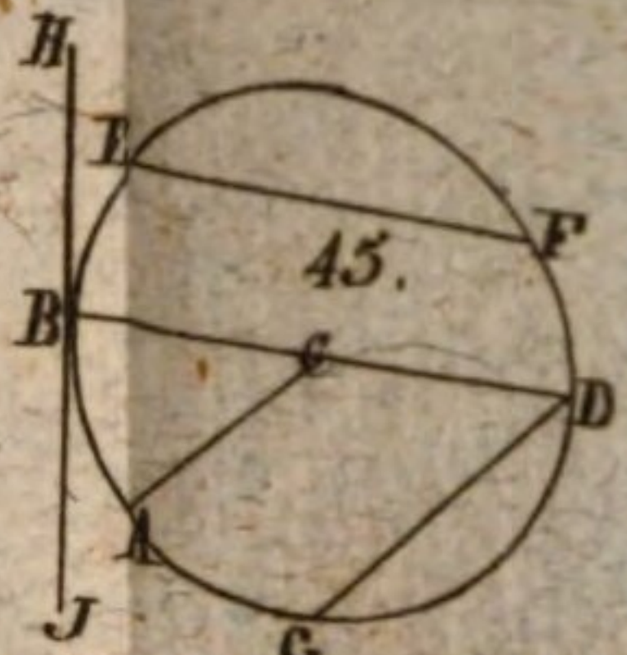
69.



43.

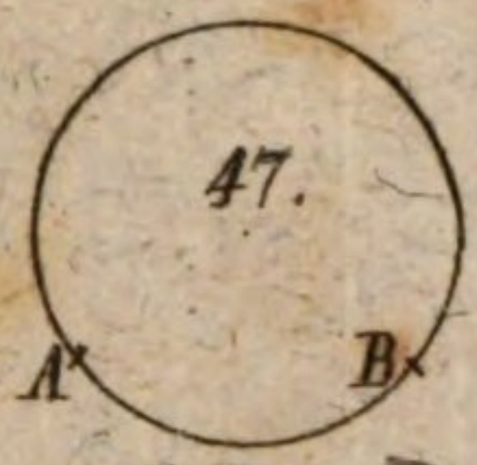


44.



45.

46.

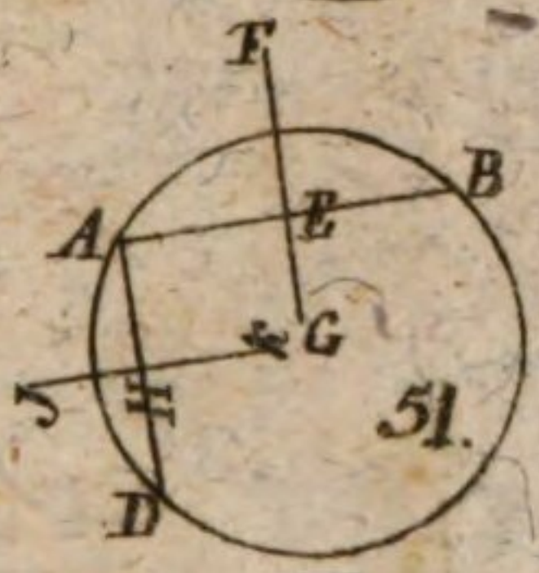


47.

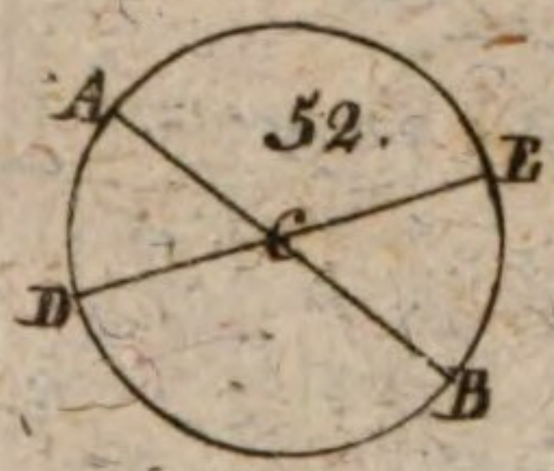
48.

49.

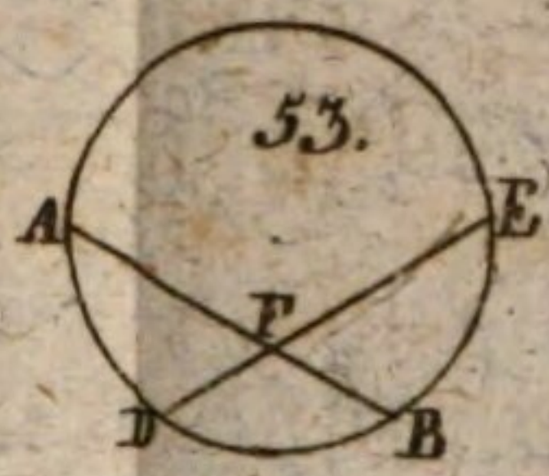
50.



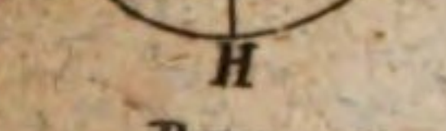
51.



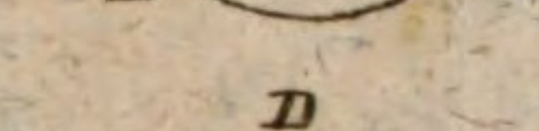
52.



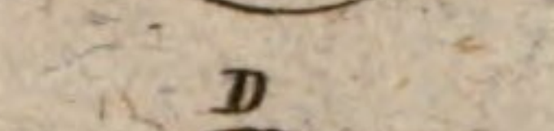
53.



54.

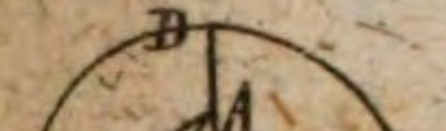


55.

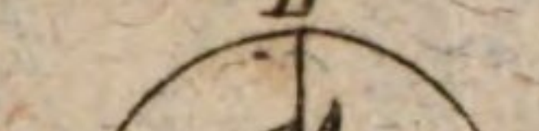


56.

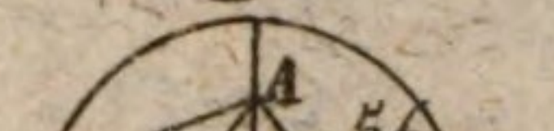
57.



60.

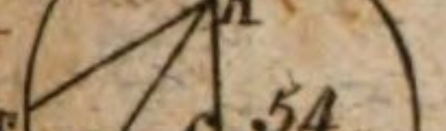


61.



58.

62.

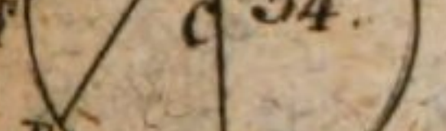


59.

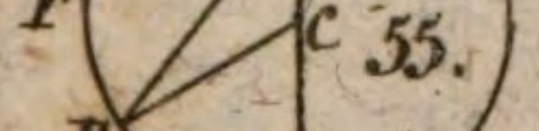
63.

64.

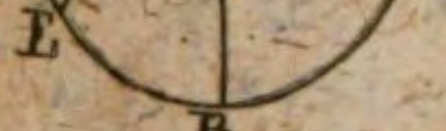
65.



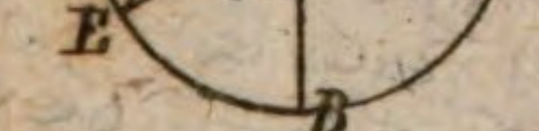
66.



67.

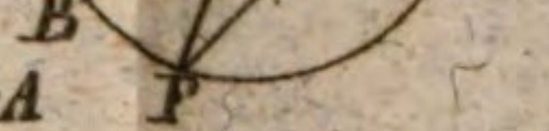


68.

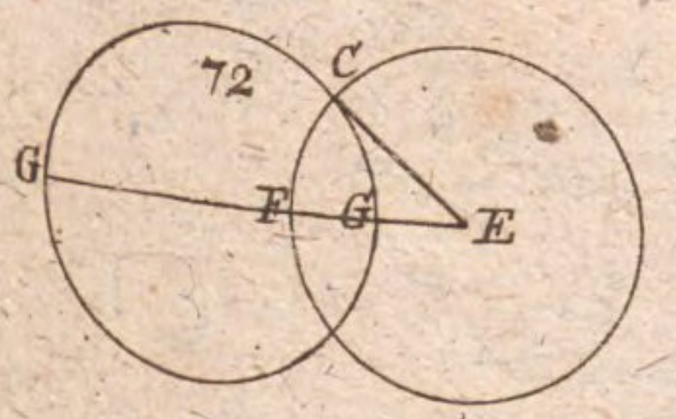


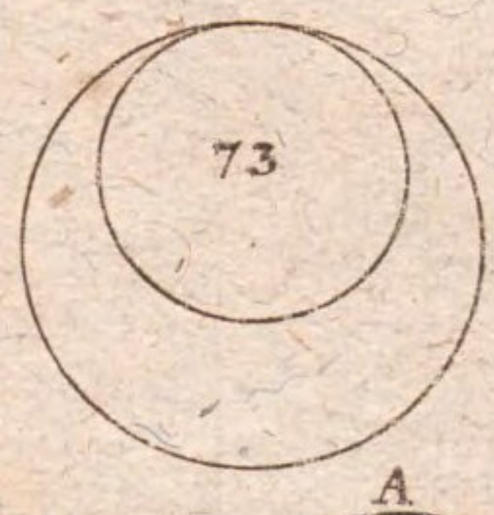
69.

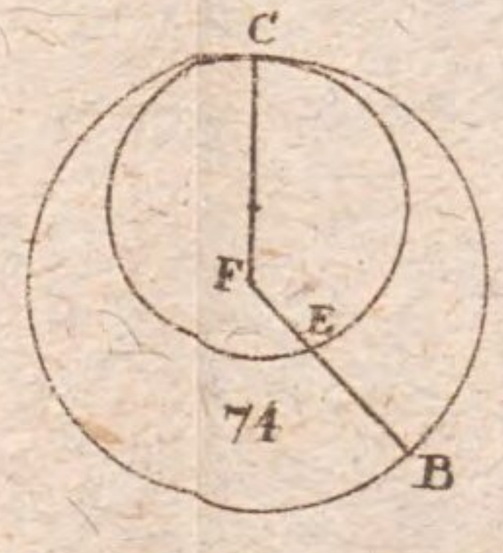
70.

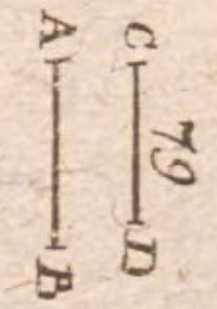


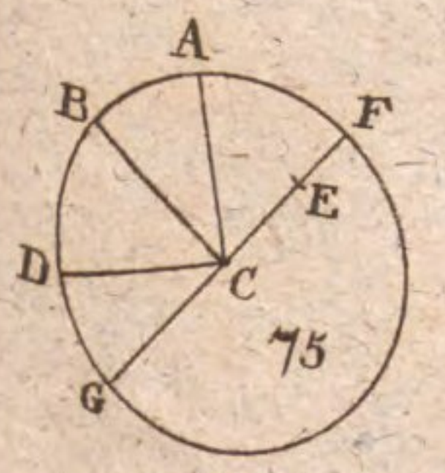
71.

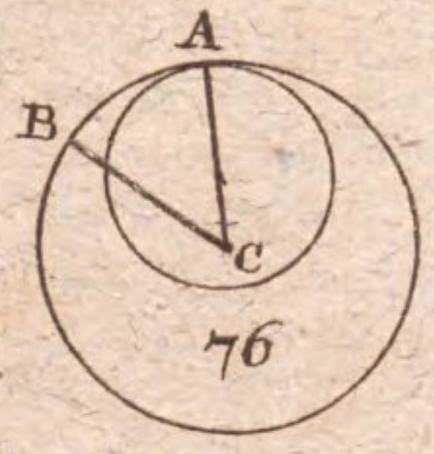

72
C
G
F
G
E

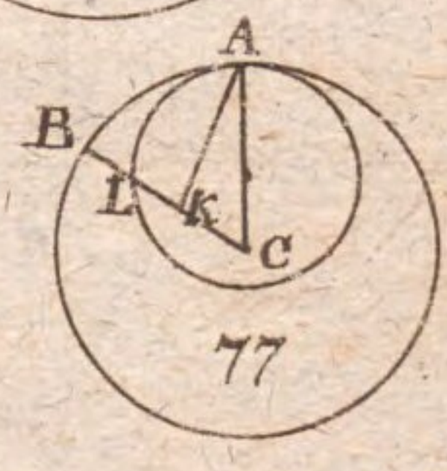

73

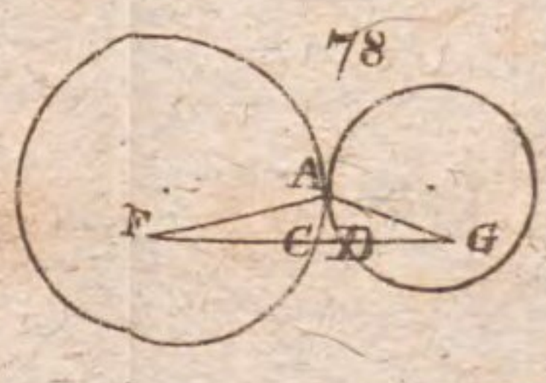

C
F
E
74
B

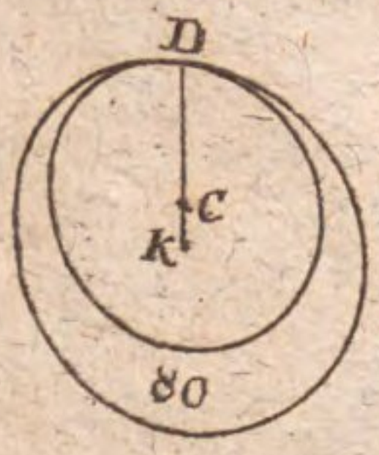

A
B
C
D
79

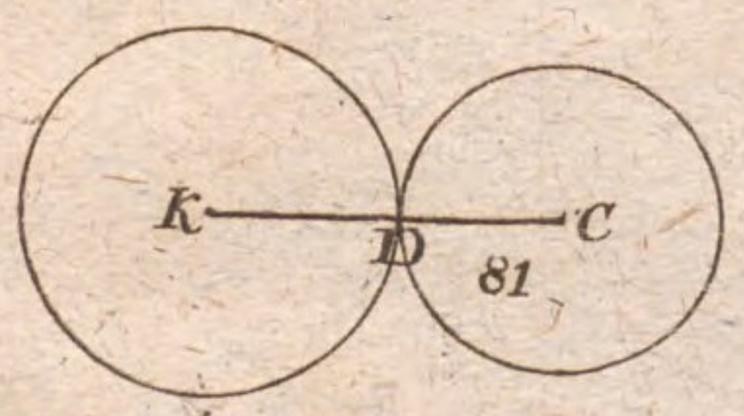

A
B
F
E
D
C
75
G


A
B
C
76

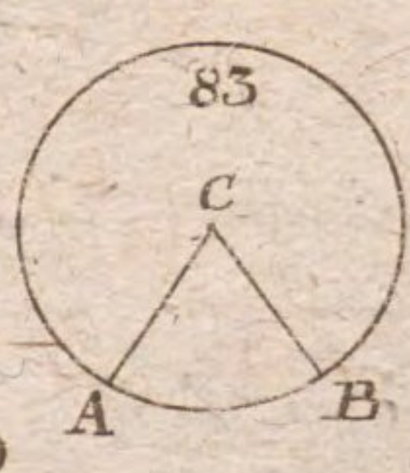

A
B
L
K
C
77


78
A
F
C
D
G


D
K
C
80

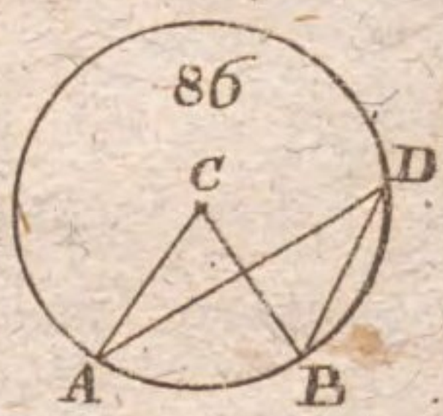

K
D
C
81

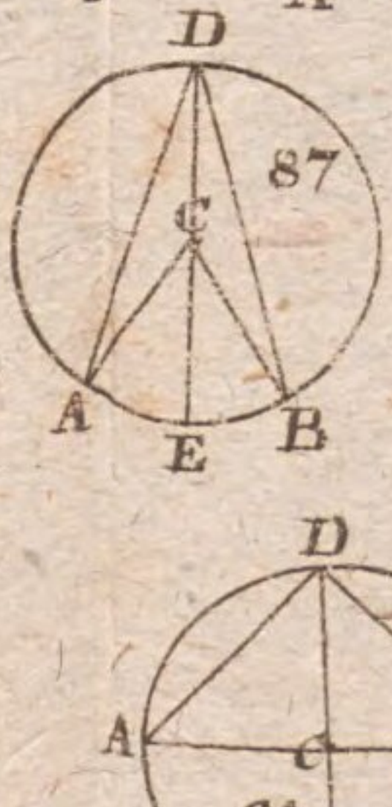
A
D
82
B
C

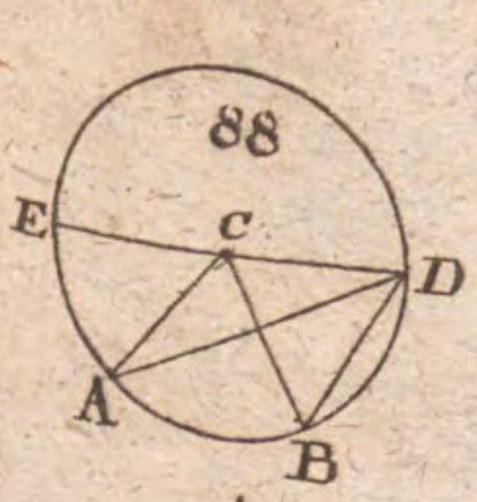

83
C
A
B

D
84
C
A
B

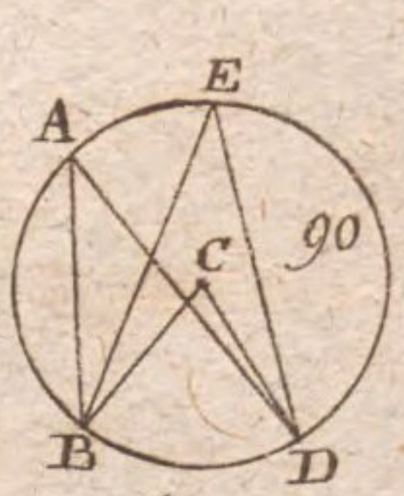
D
C
85
A
B

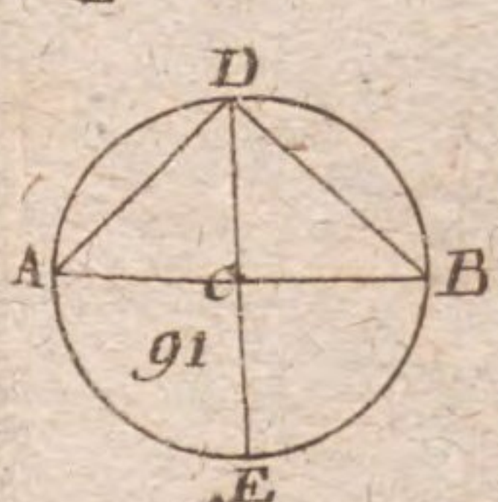

86
C
D
A
B

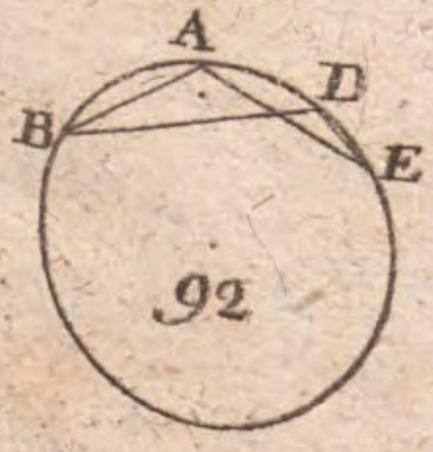

D
87
C
A
E
B

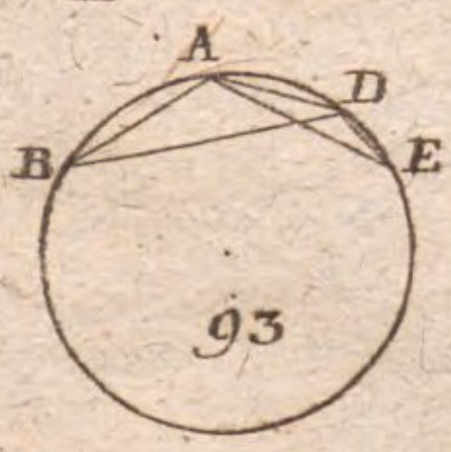

88
E
C
D
A
B

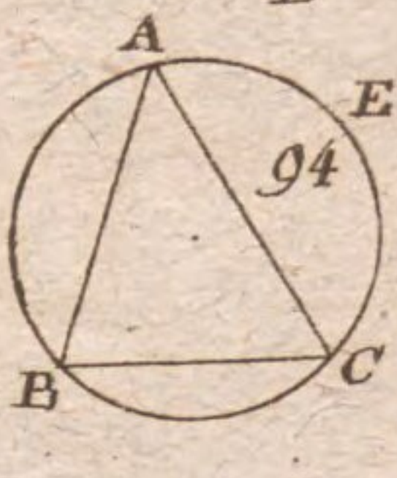
E
A
89
B
D


E
A
C
90
B
D

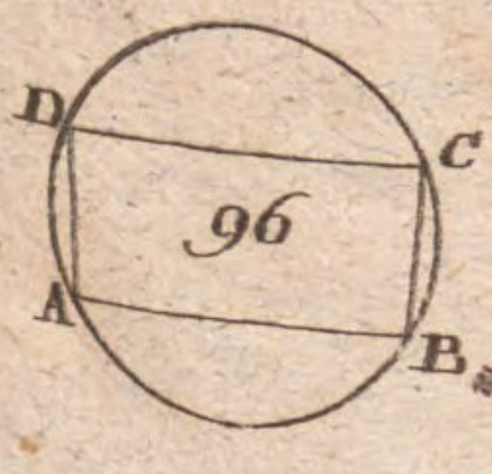

D
A
C
B
91


A
D
B
E
92

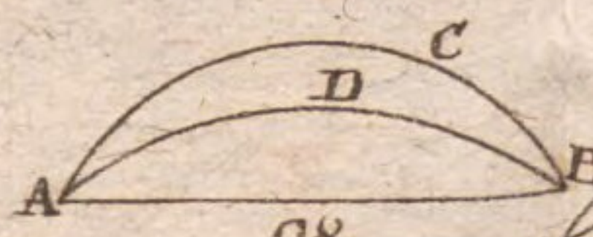

A
D
B
E
93

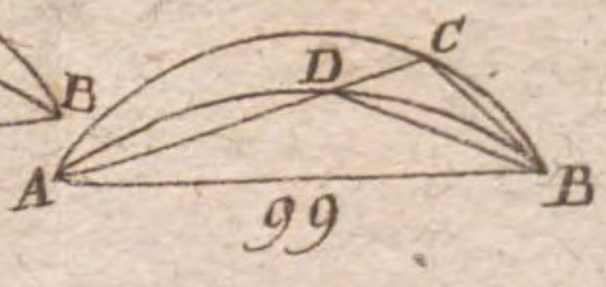

A
E
94
B
C

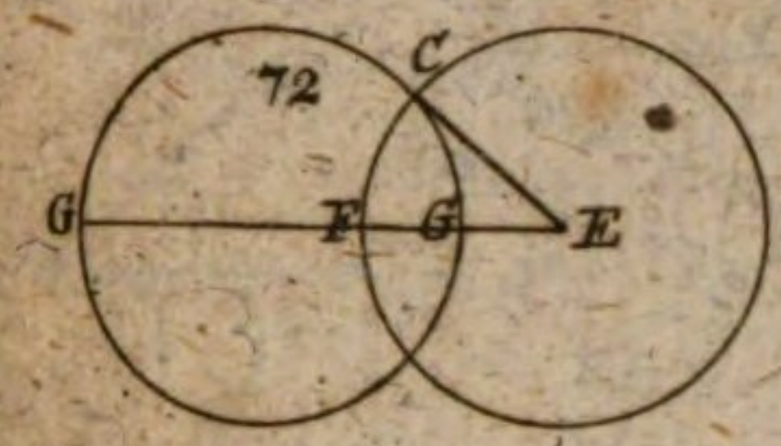
A
E
95
B
C
D
E


D
C
96
A
B

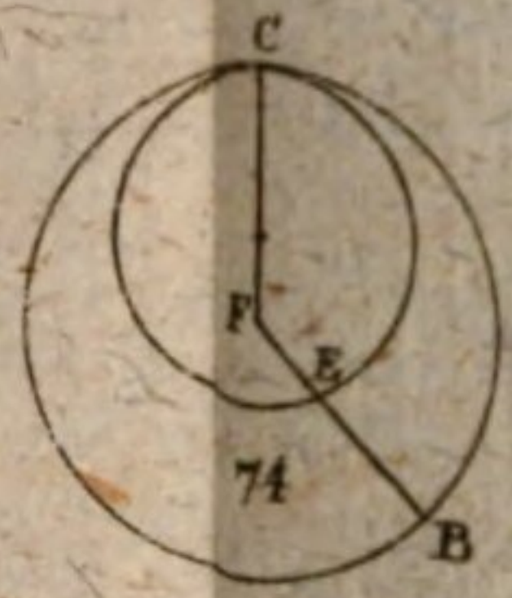
97
D
C
A
B

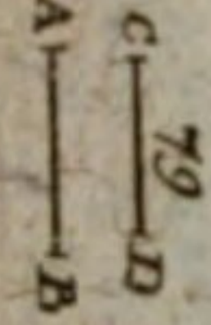

C
D
A
B
98

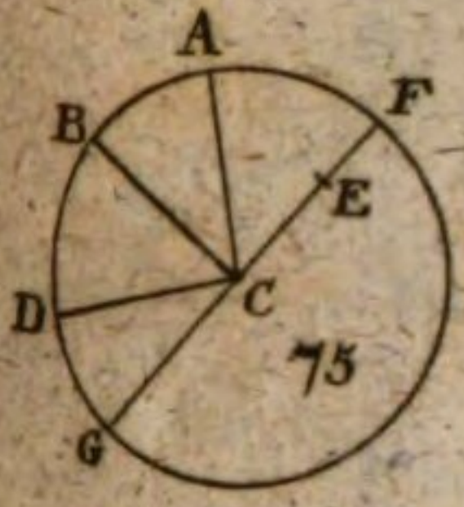

C
D
A
B
99

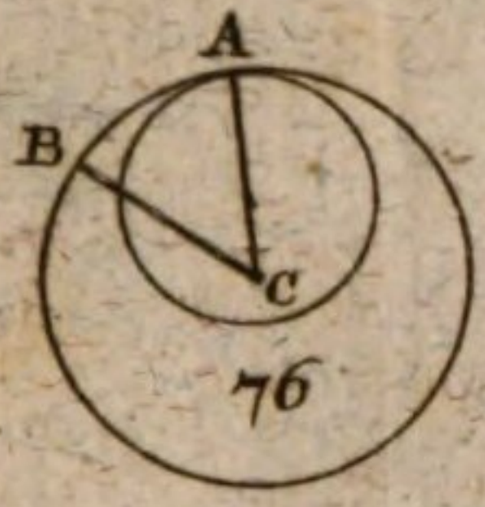

72
C
G
F
G
E

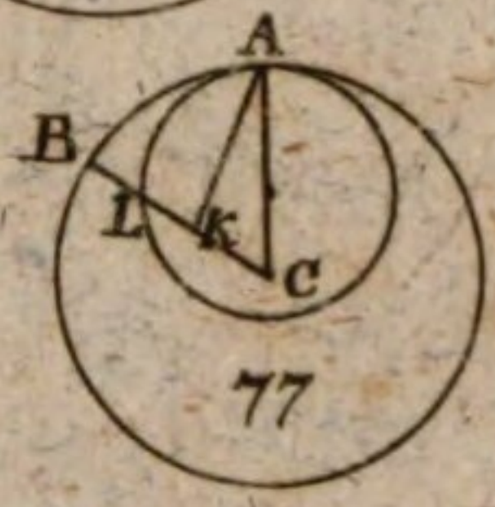
73

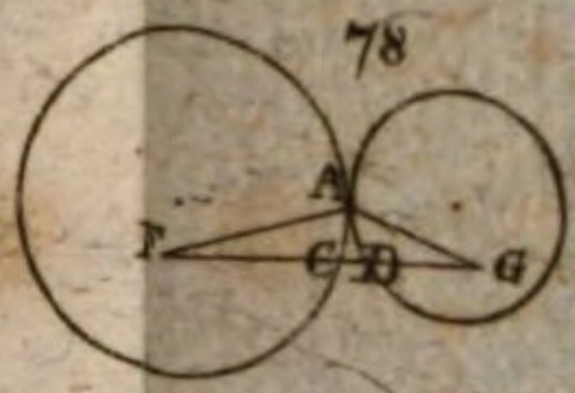

C
F
E
74
B

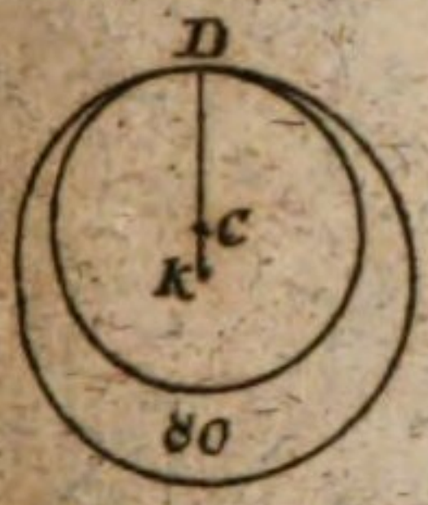

A
B
C
D

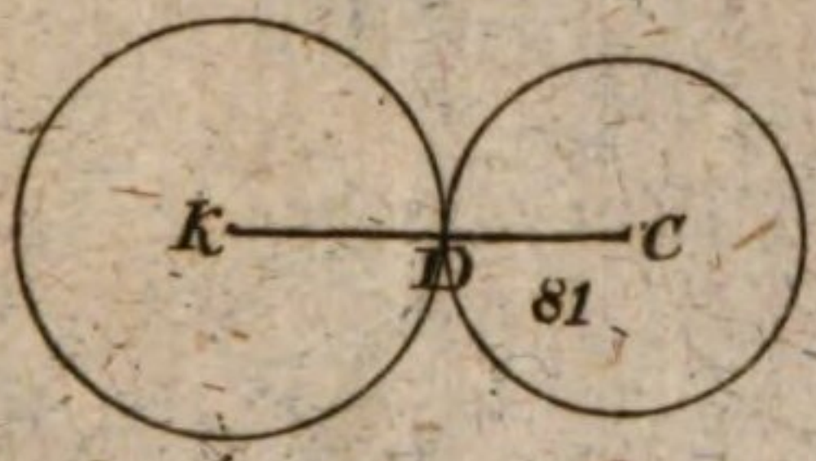

A
B
F
E
D
C
75
G


A
B
C
76


A
B
L
K
C
77


78
A
F
C
D
G

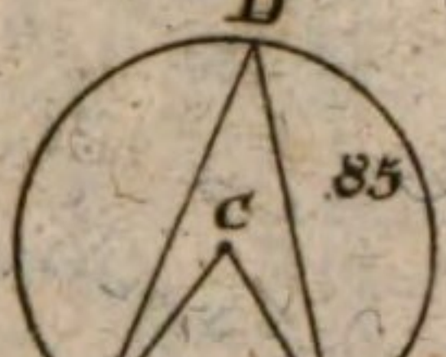

D
C
K
80


K
D
C
81

A
D
82
B
C

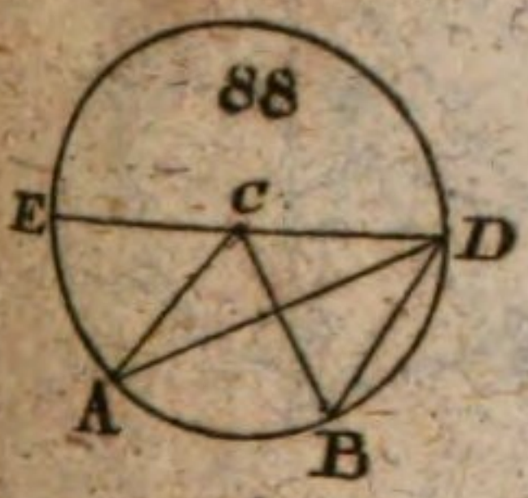
83
C
A
B

D
84
C
A
B


D
C
85
A
B

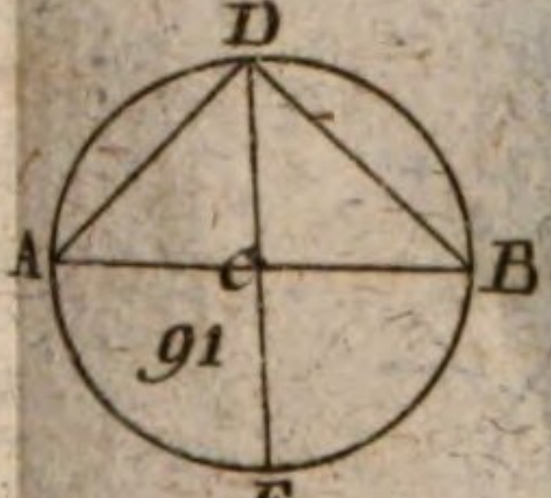
86
C
D
A
B

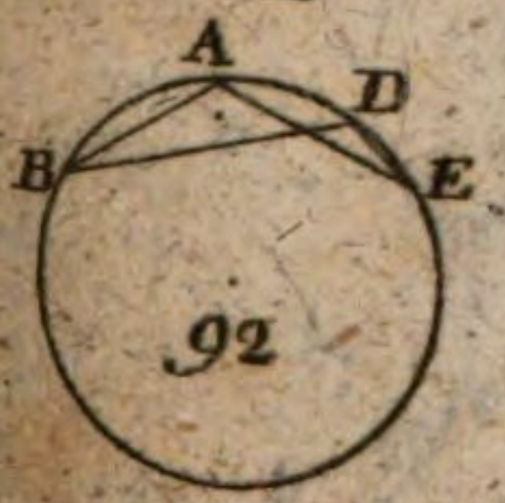
D
87
C
A
E
B

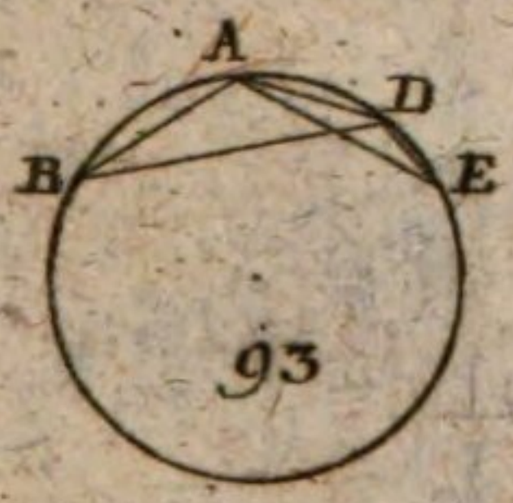

88
E
C
D
A
B

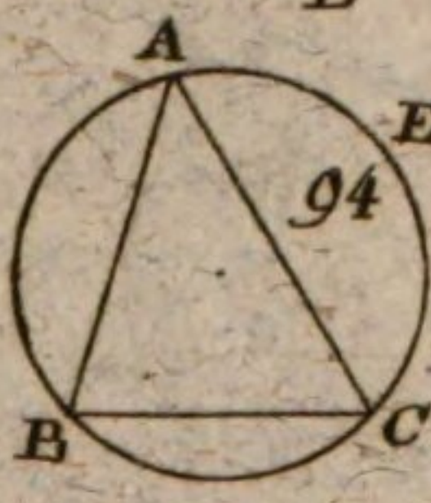
E
A
89
B
D

E
A
C
90
B
D

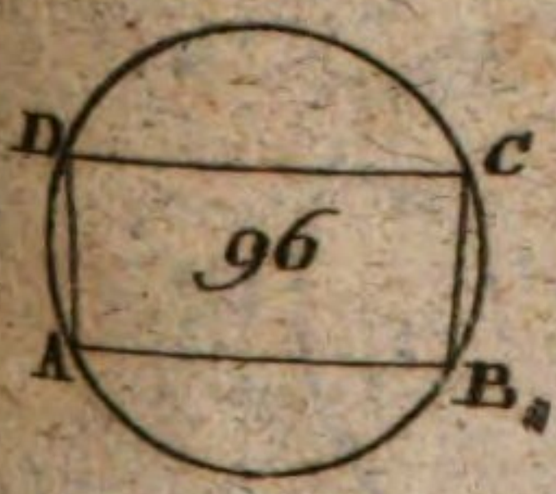

D
A
B
91
E


A
D
B
E
92

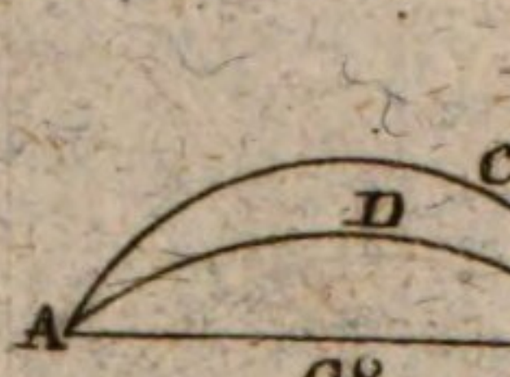

A
D
B
E
93

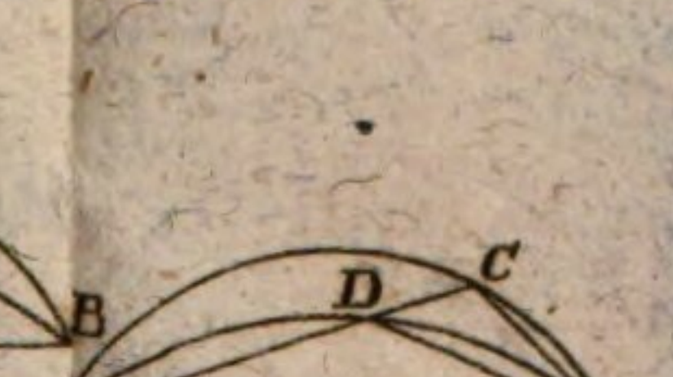

A
E
94
B
C

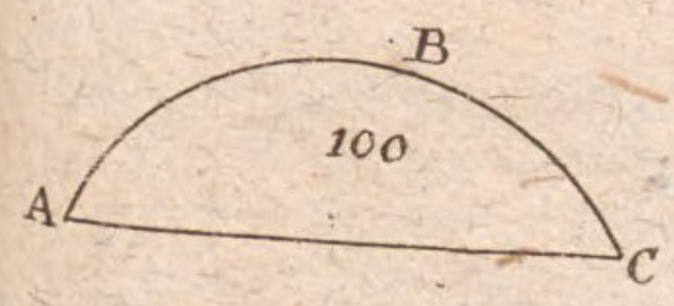
E
A
95
B
C
D
E

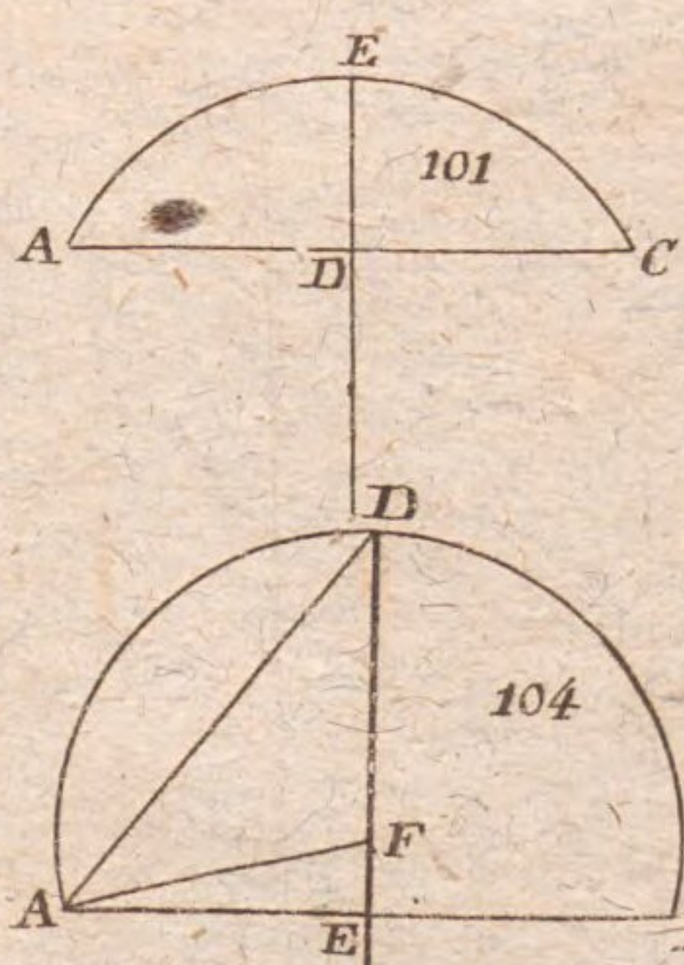

D
C
96
A
B

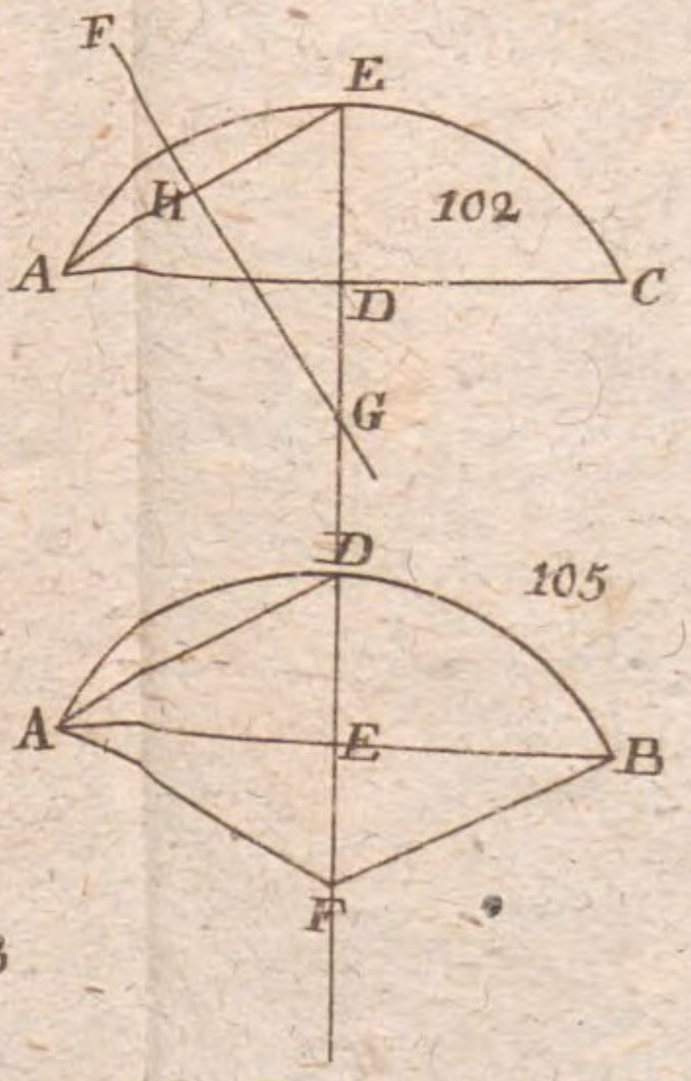
97
D
C
A
B

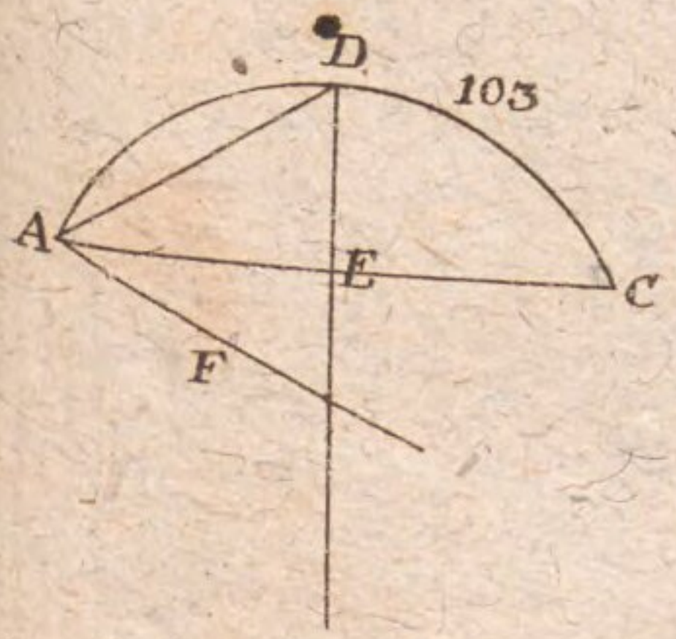

C
D
A
B
98

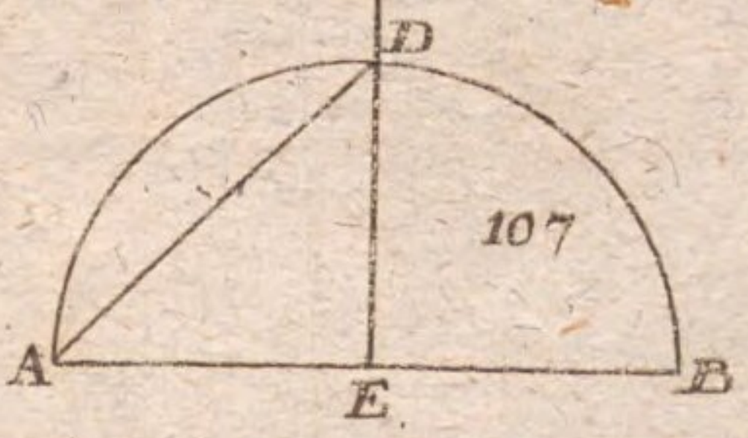

D
C
A
B
99

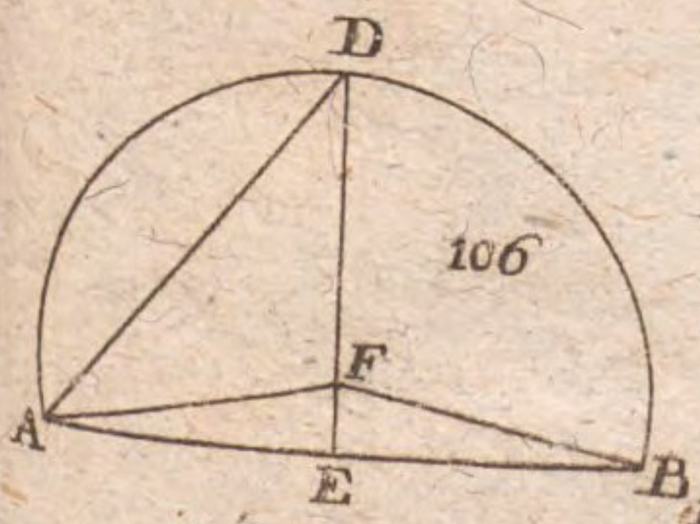

B
100
A
C


E
101
A
D
C
D
104
F
A
E
B


F
E
H
102
A
D
C
G
D
105
A
E
B
F

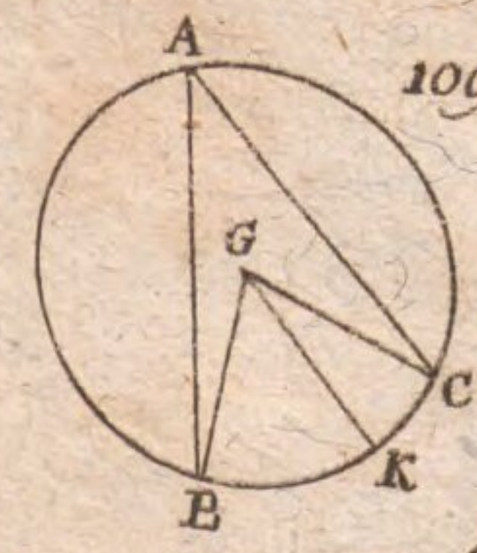

D
103
A
E
C
F


D
107
A
E
B

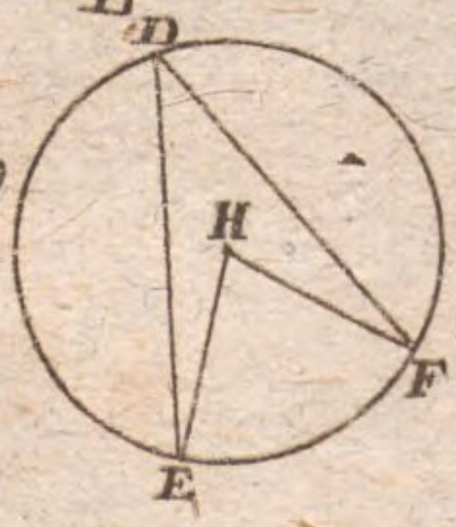

D
106
F
A
E
B

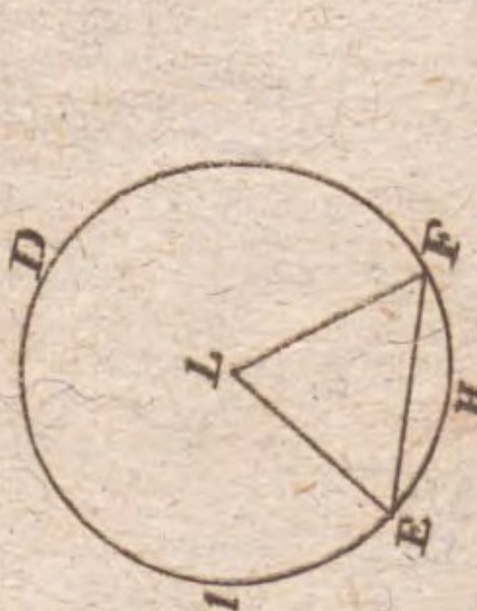
A
G
B
C
K

108


A
G
C
B
K

109


D
H
F
E

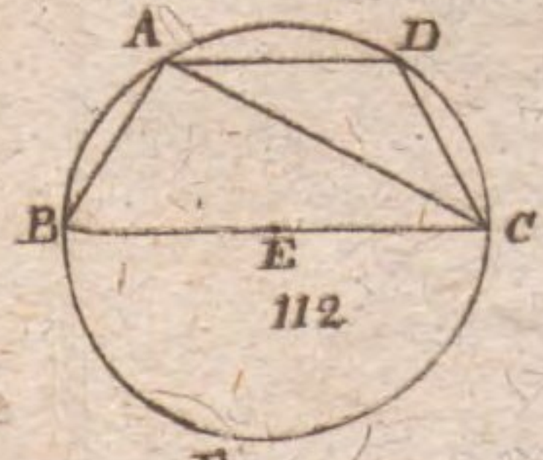

D
F
T
H
E

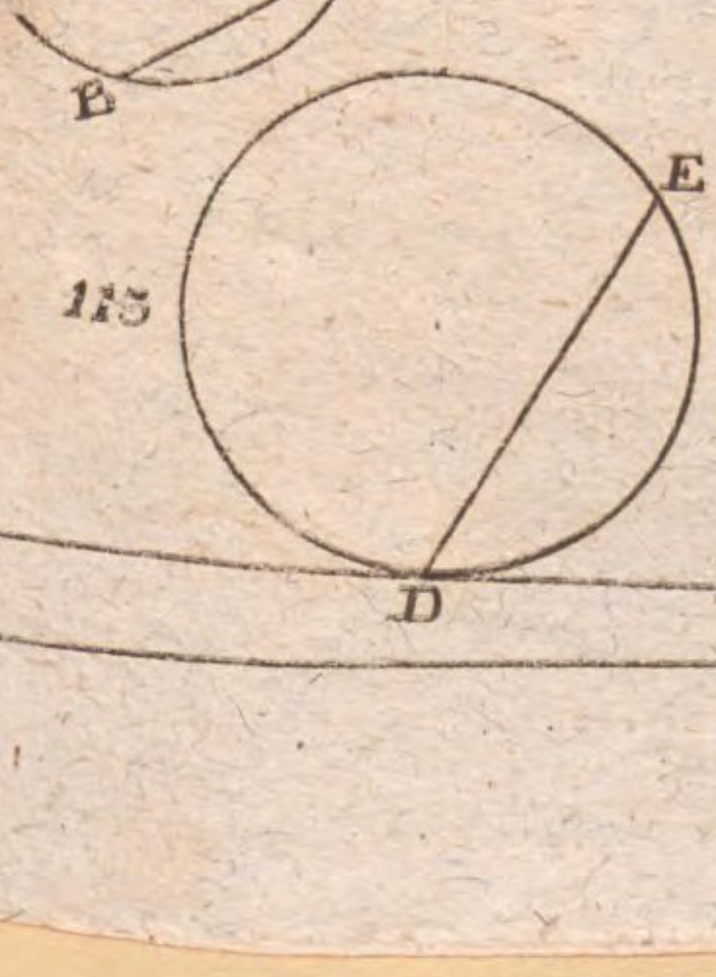
111

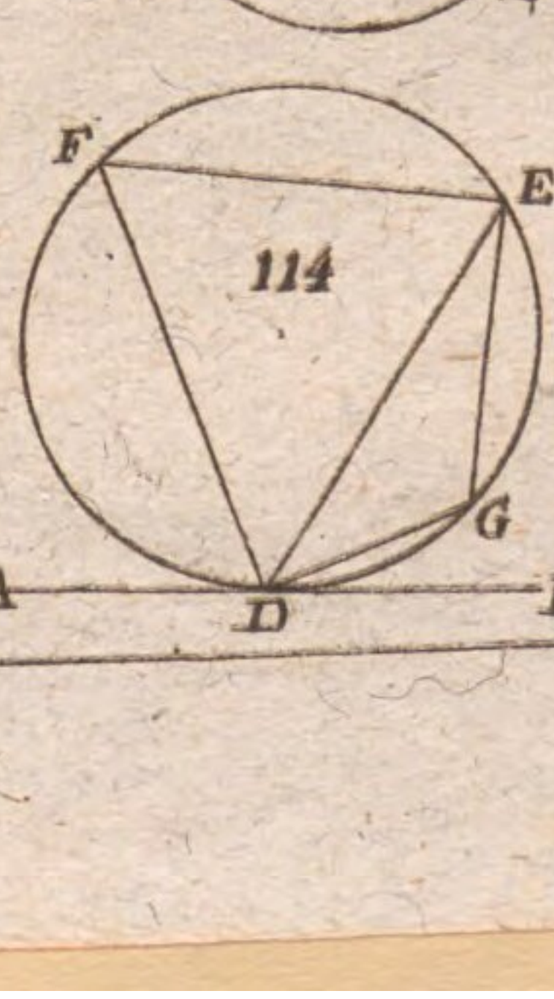
D
H
E
F
L

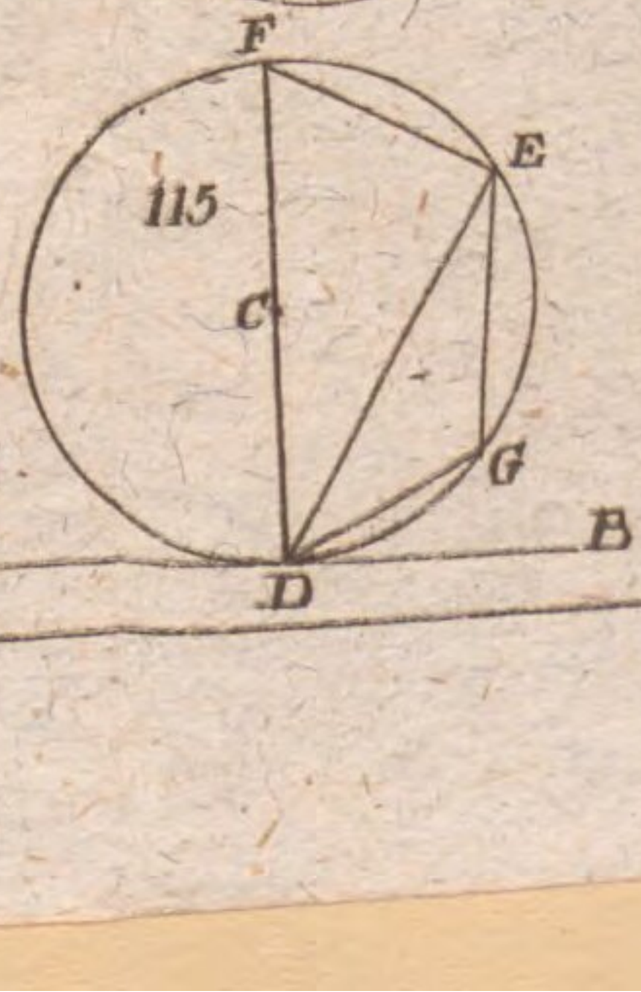
110
C
E
F
B

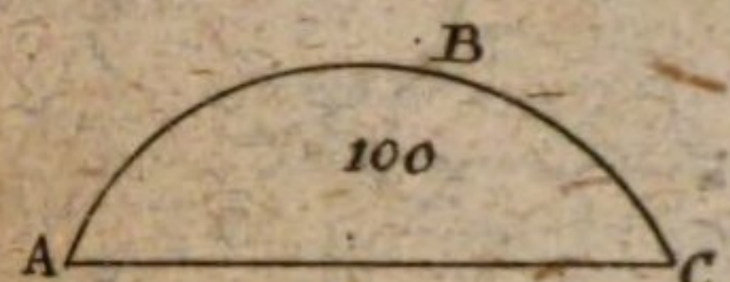
A
C
K
G
B

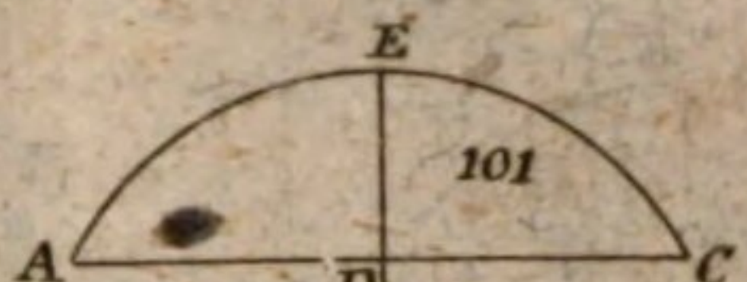

A
D
B
E
C
112

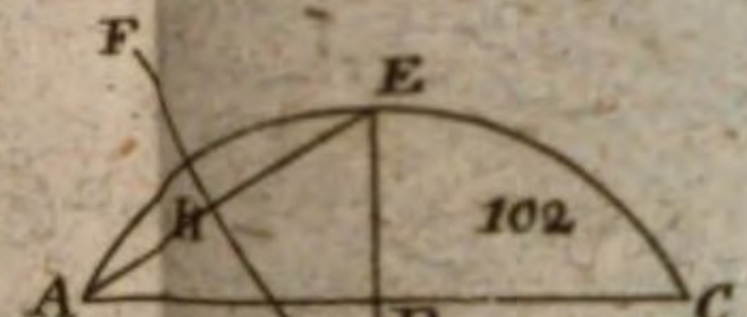

E
115
A
D
B

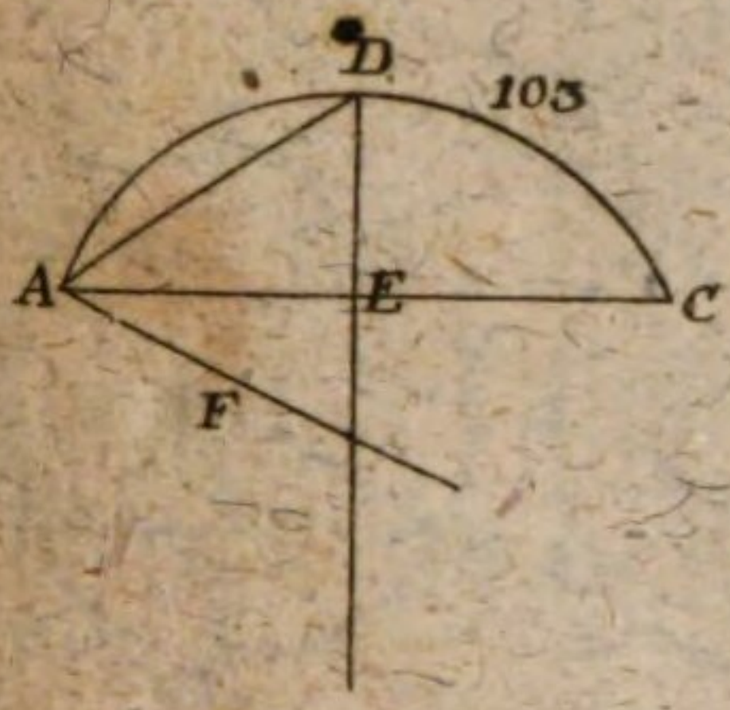

F
E
114
G
A
D
B

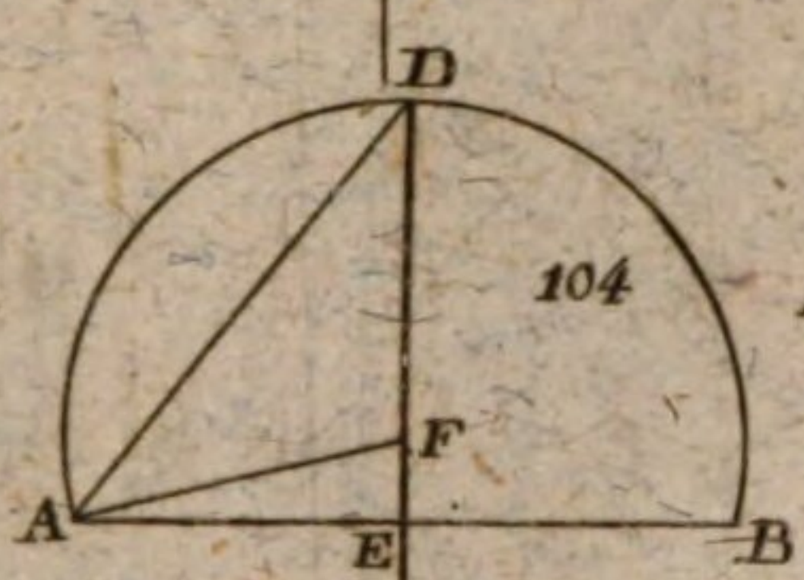

F
E
115
C
G
A
D
B

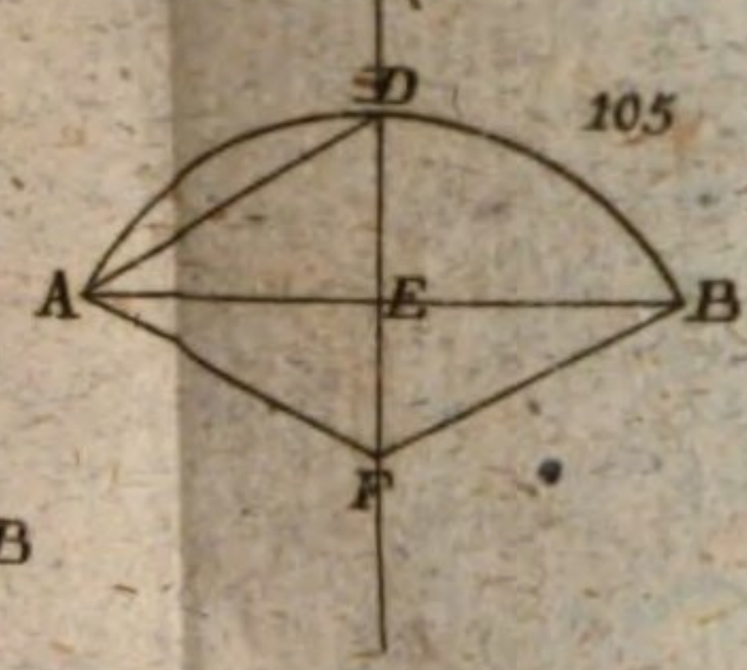

B
100
A
C

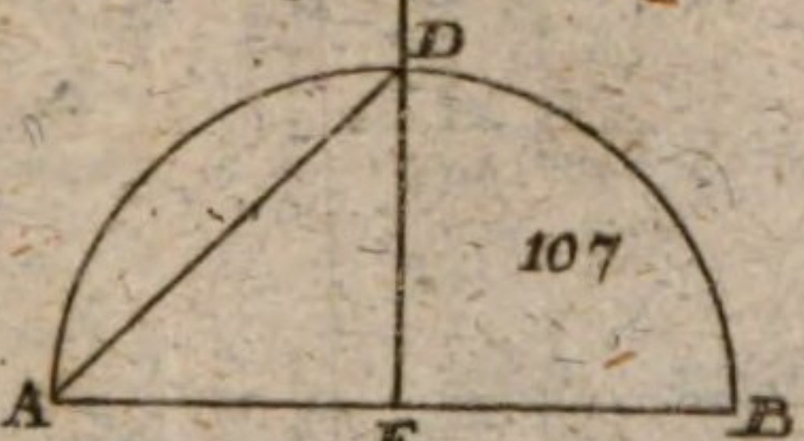

E
101
A
D
C

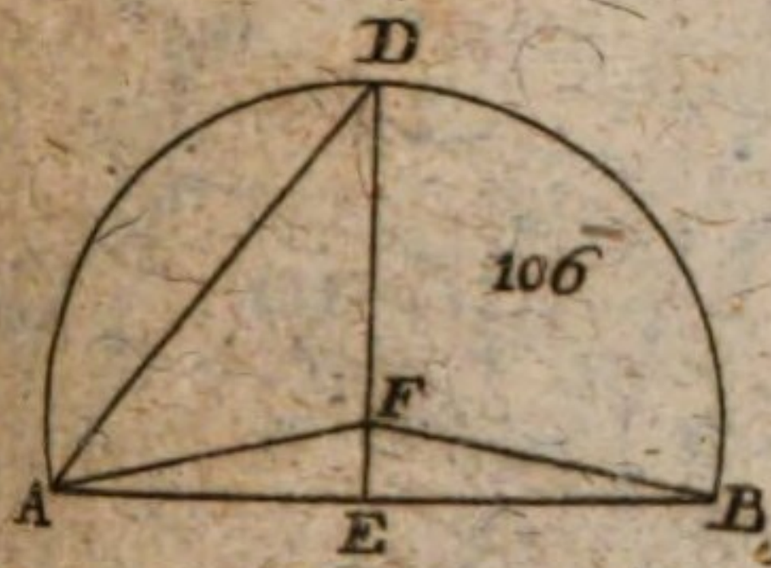

F
E
H
102
A
D
C
G


D
103
A
E
C
F


D
104
A
F
E
B

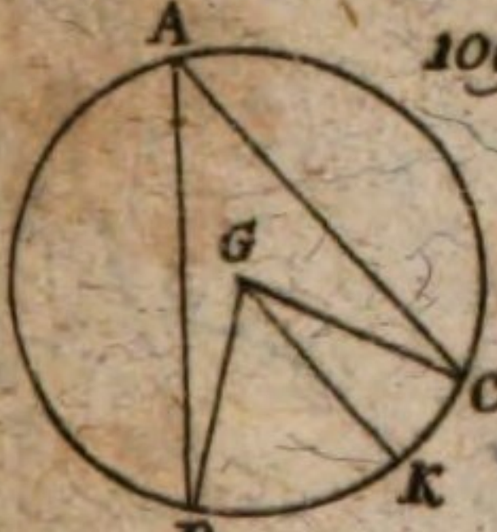

D
105
A
E
B
F


D
107
A
E
B

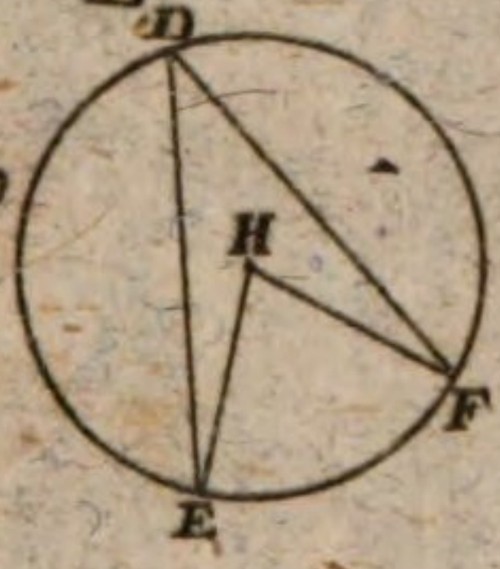

D
106
F
A
E
B

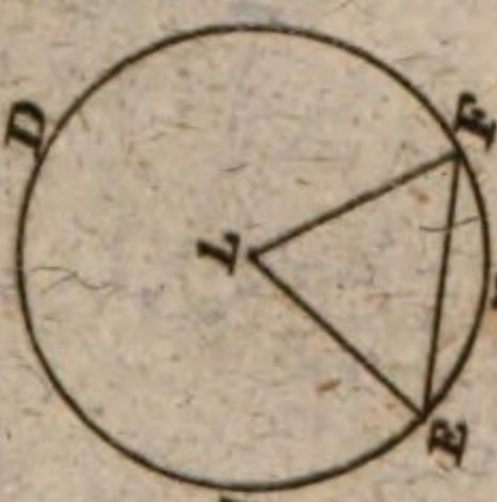
A
G
B
C
K

108


A
G
C
K
B

109

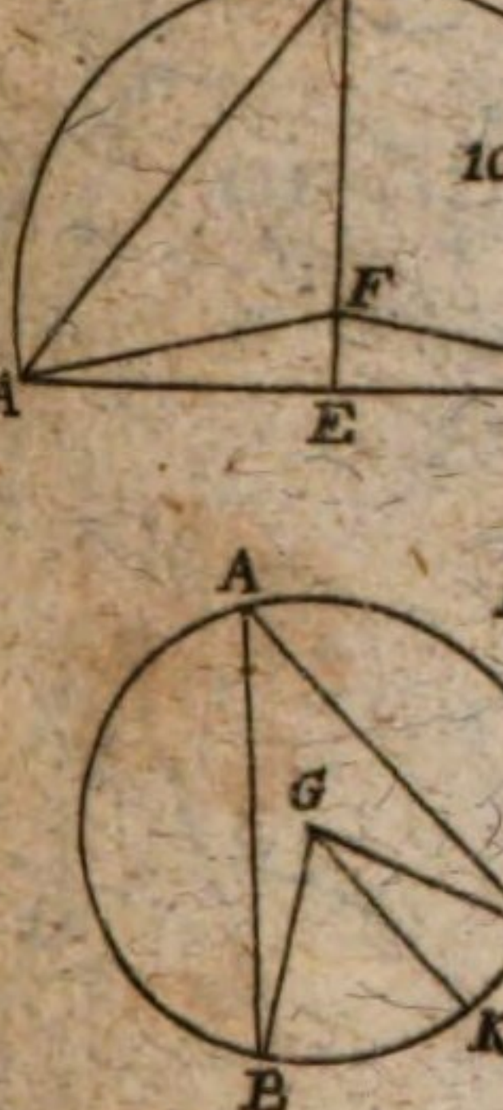

D
H
F
E


D
F
H
E

D
H
E
F
L

111

A
C
F
B
G


110
C
B

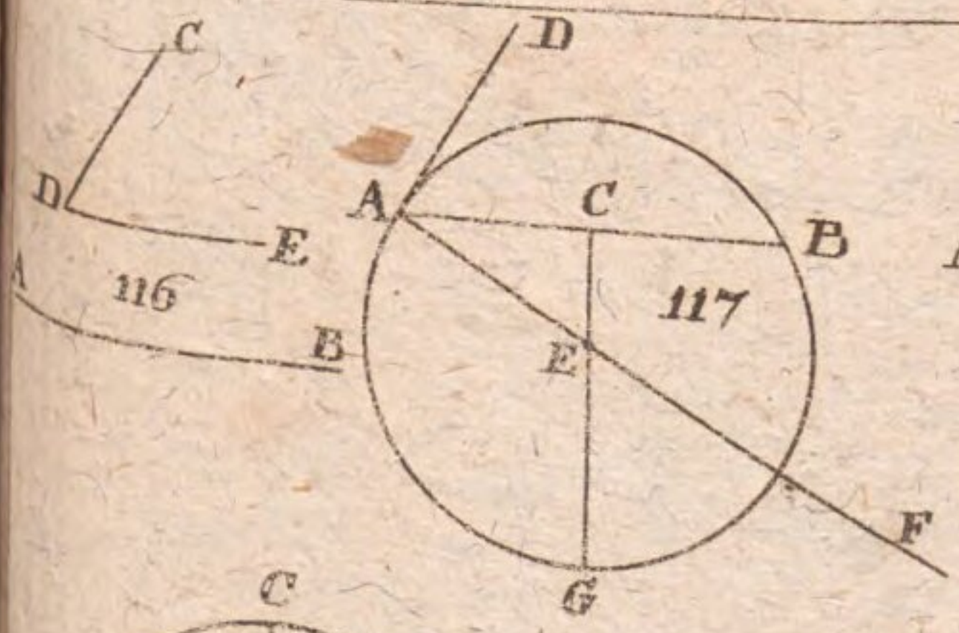
F
E

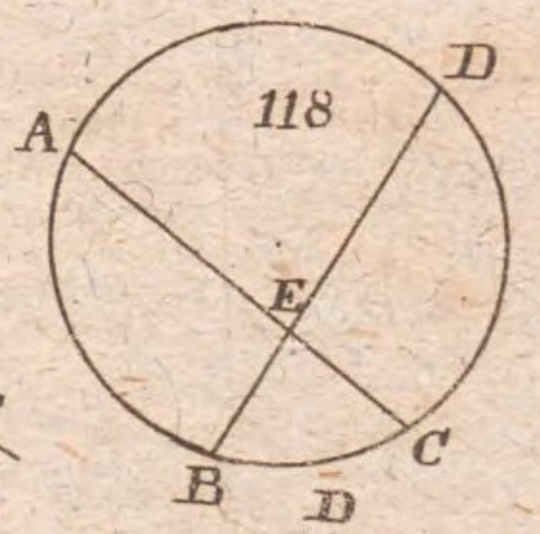
A
D
B
E
C
112
F

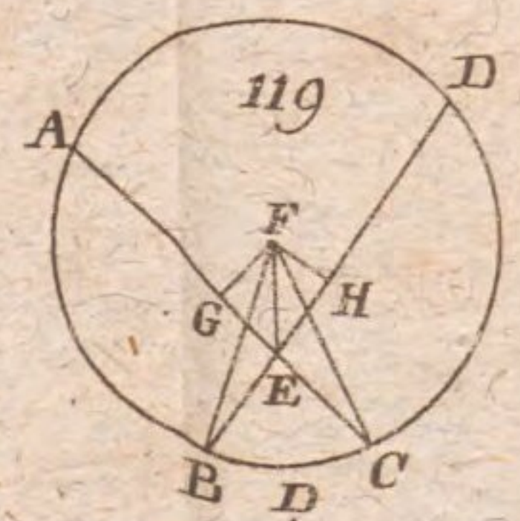
E
113
A
D

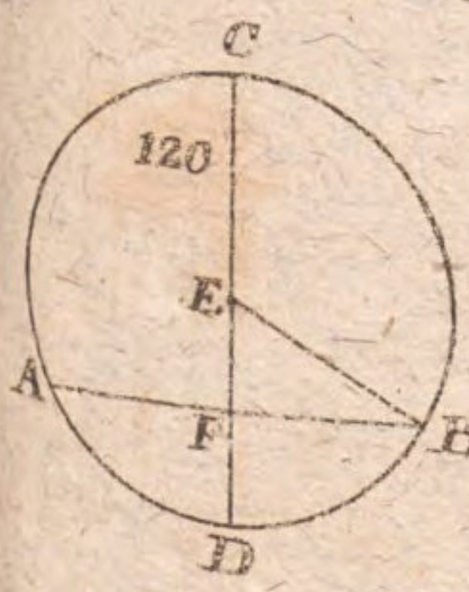
F
E
114
G
A
D
B

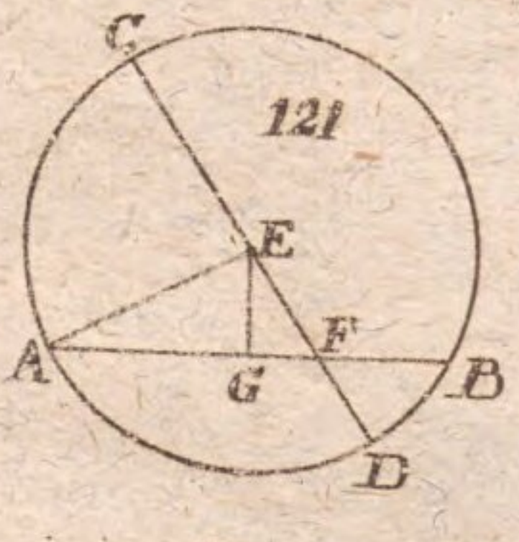
115
E
C
G
A
D
B

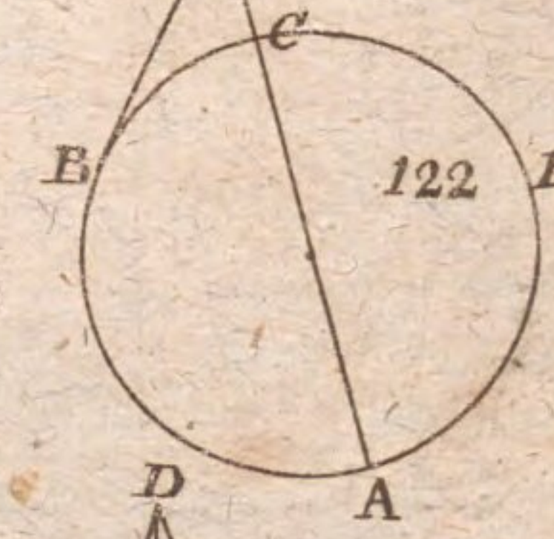

C
D
D
E
A
116
B
A
C
B
117
E
F
G

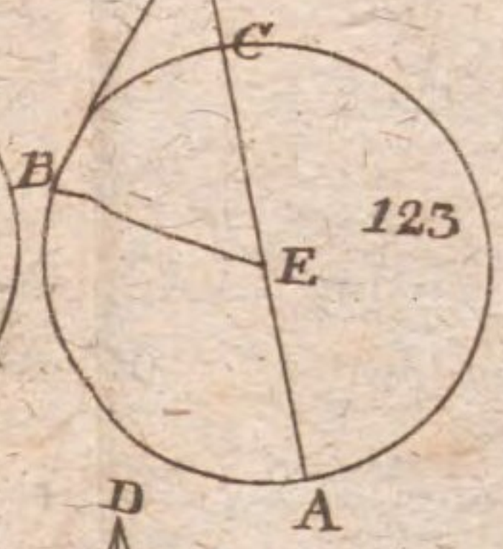

118
A
D
E
B
D
C

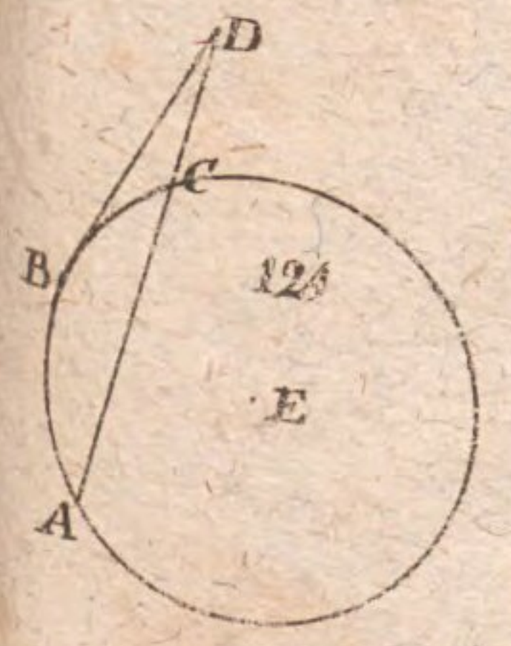

119
A
D
F
G
H
E
B
D
C

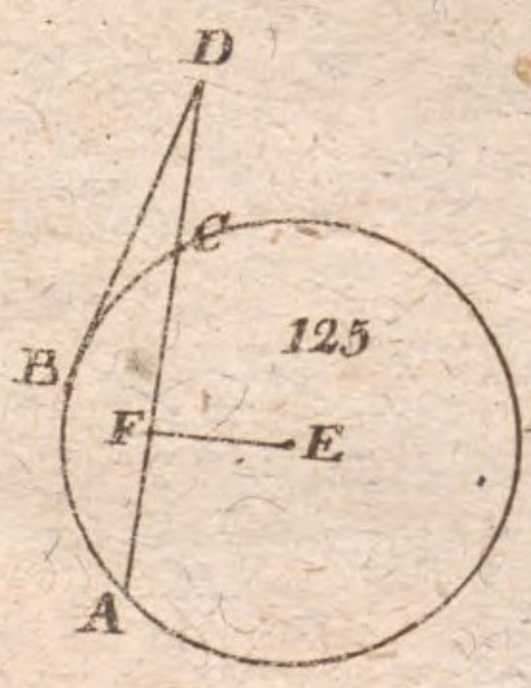

C
120
E
A
F
B
D

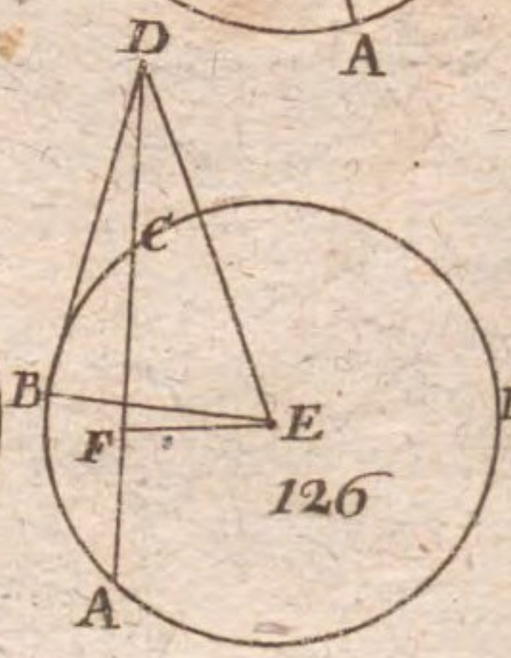

C
121
E
A
G
F
B
D

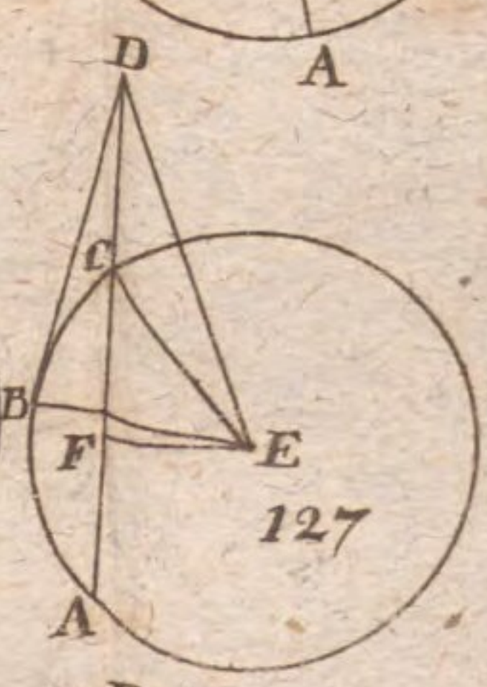

D
C
B
122
A

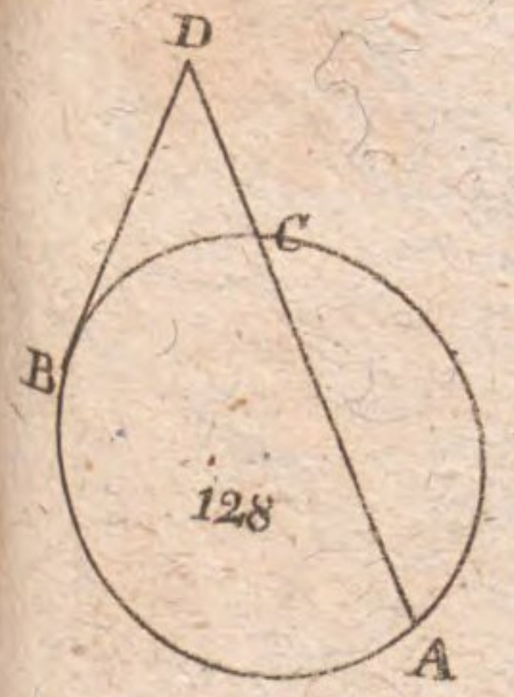

D
C
B
123
E
A

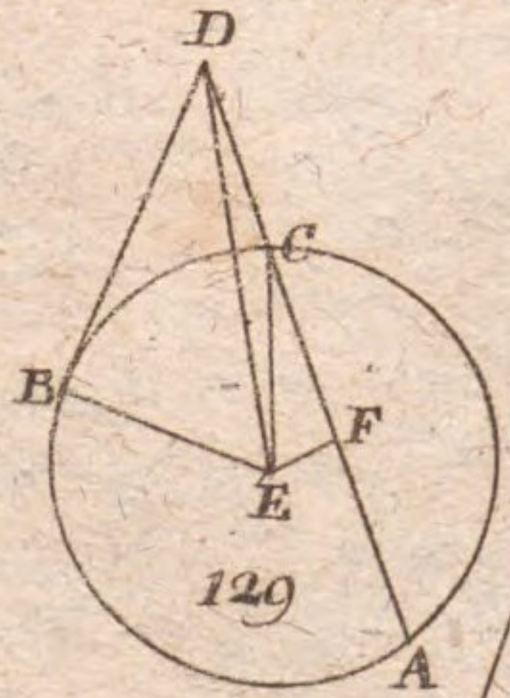

D
C
B
124
E
A

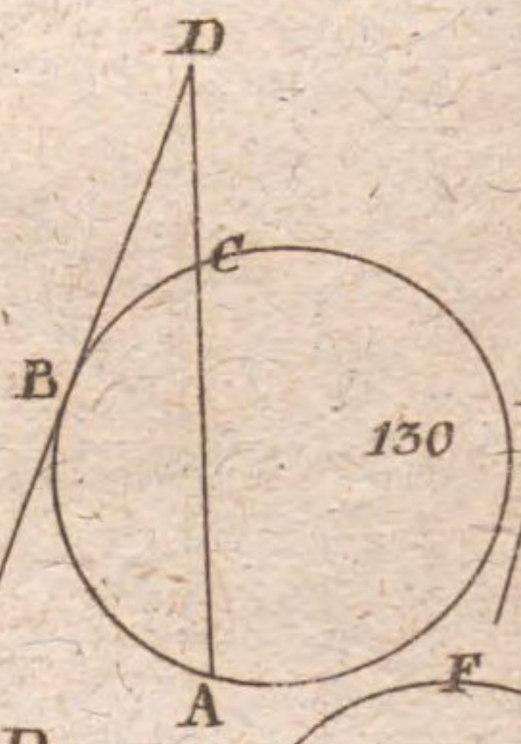

D
C
B
125
F
E
A

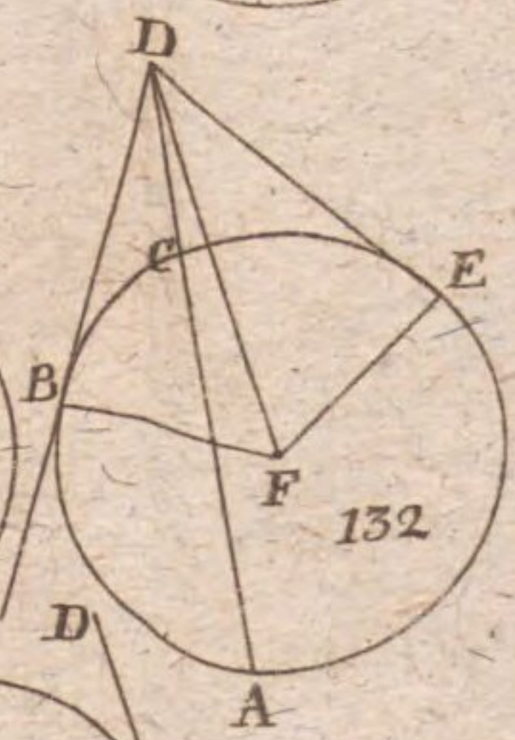

D
C
B
E
F
126
A


D
C
B
E
F
127
A

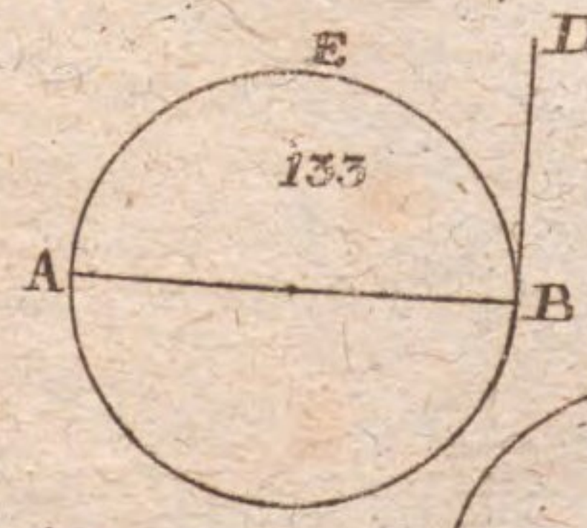

D
C
B
128
A


D
C
B
F
E
129
A

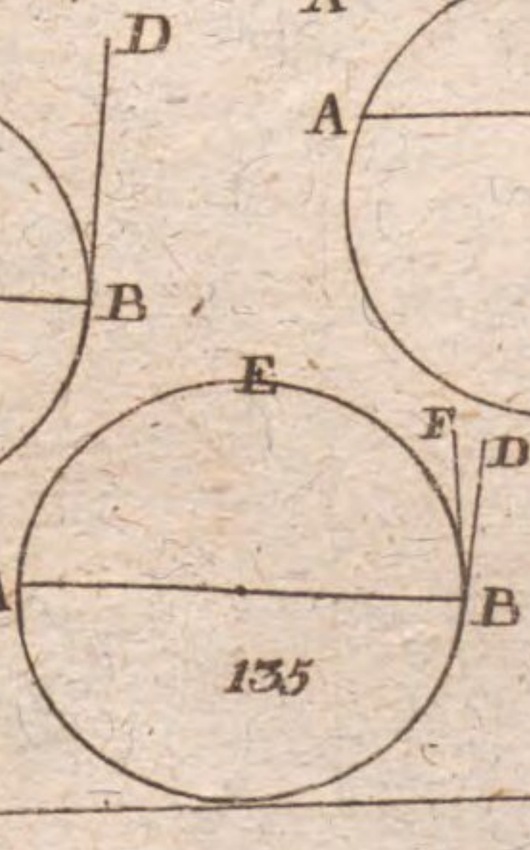

D
C
B
130
A

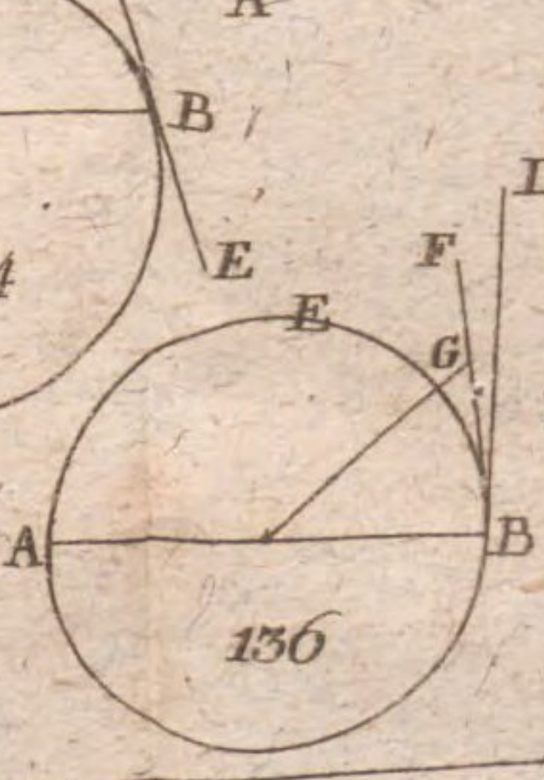

D
C
E
B
F
132
A

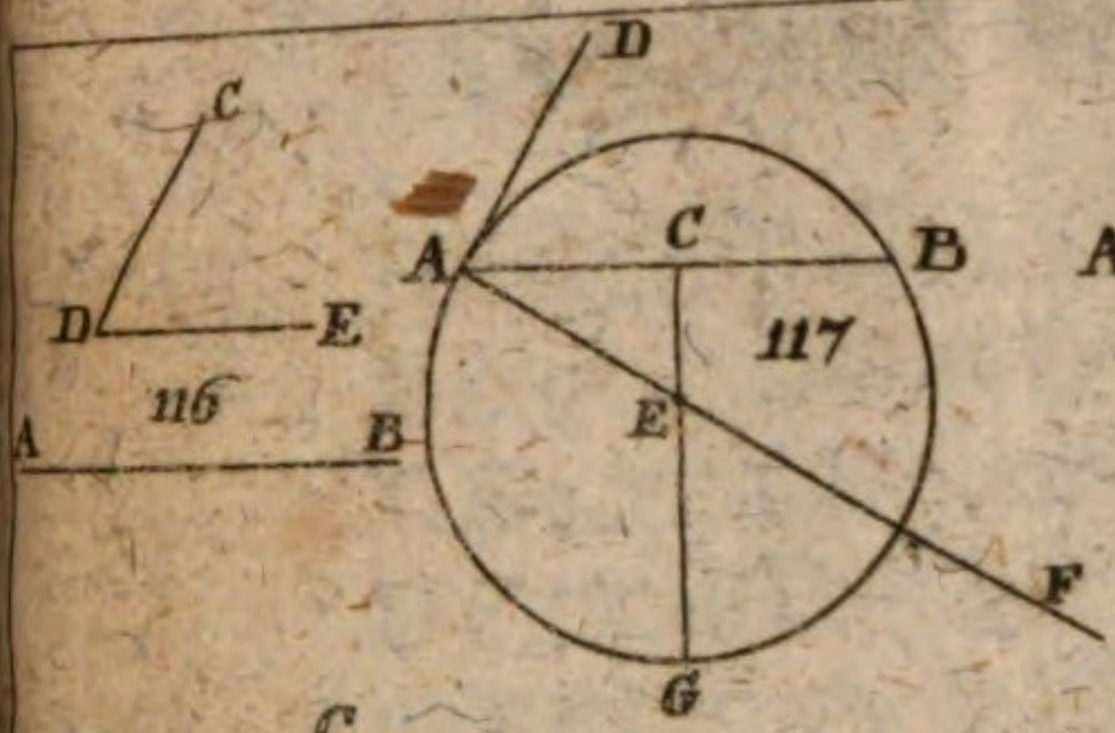
D
C
G
B
H
131
A

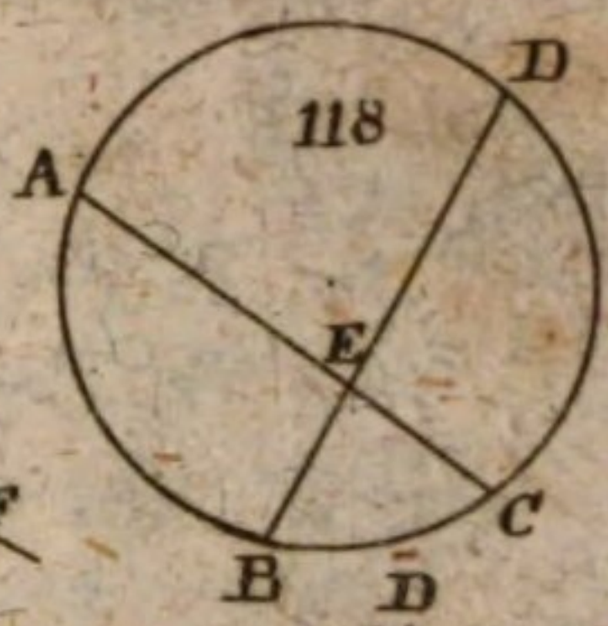

E
D
133
A
B

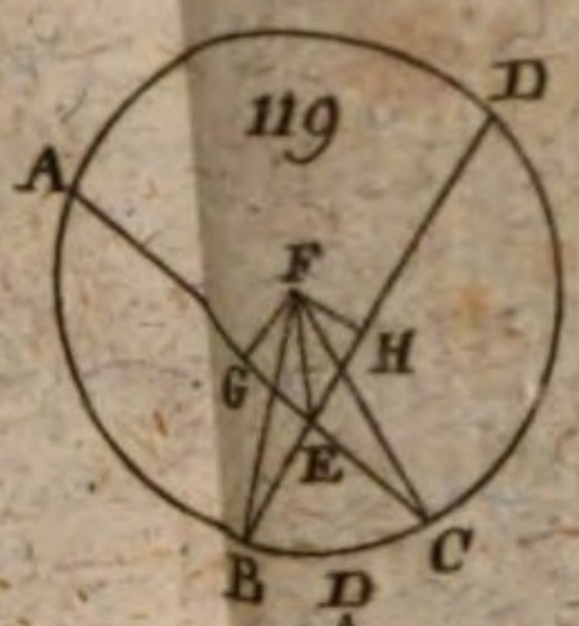
F
A
B
134
E
G

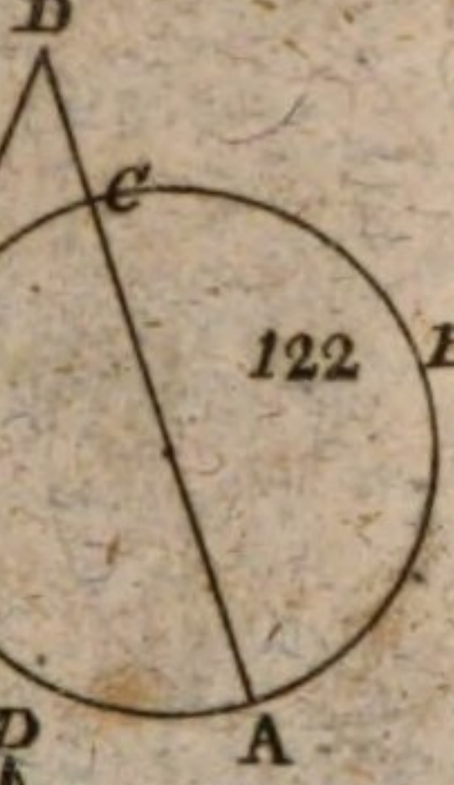

E
F
D
135
A
B

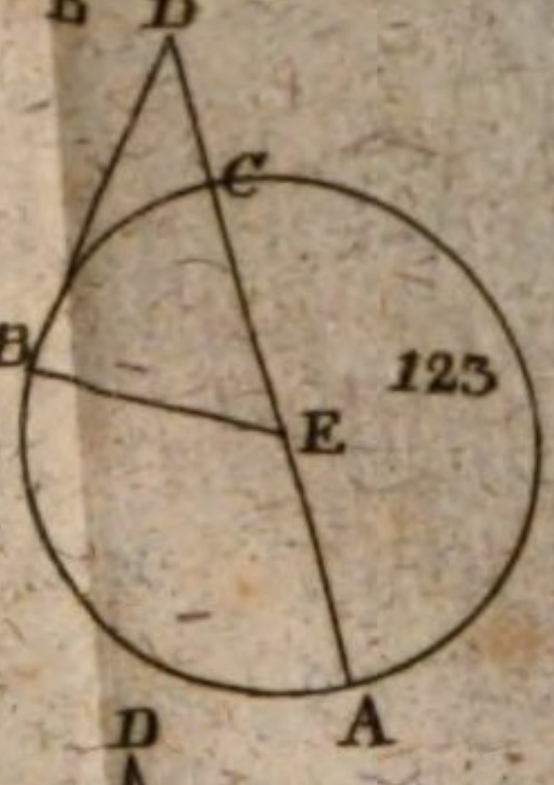

E
G
F
D
136
A
B

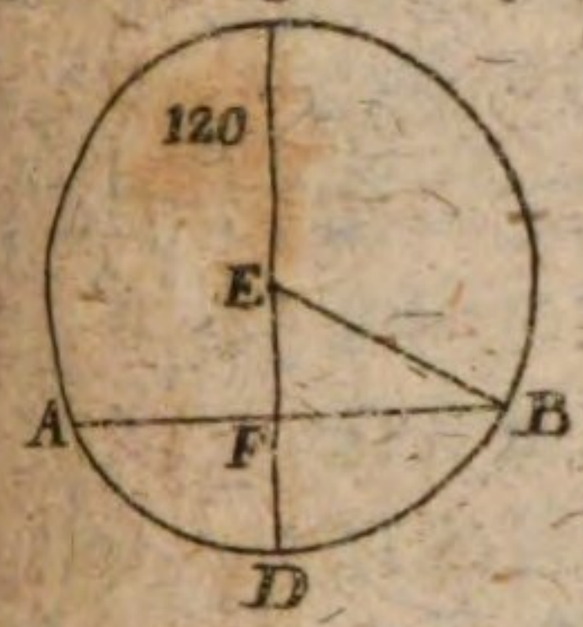

C
D
D
E
116
A
B
A
C
B
117
E
F
G

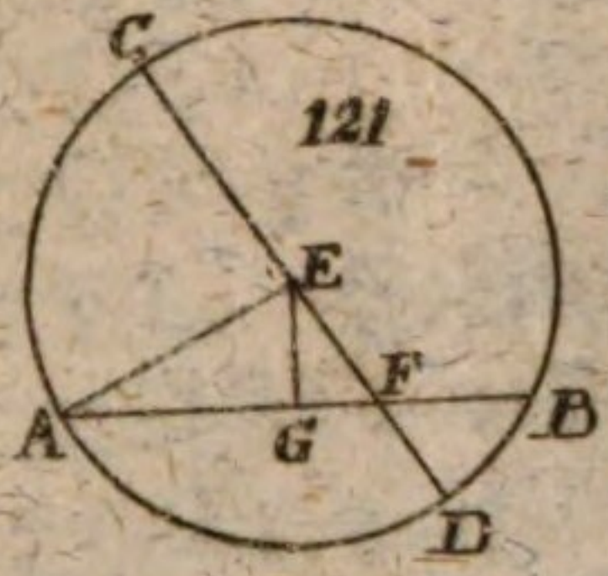

118
D
A
E
C
B

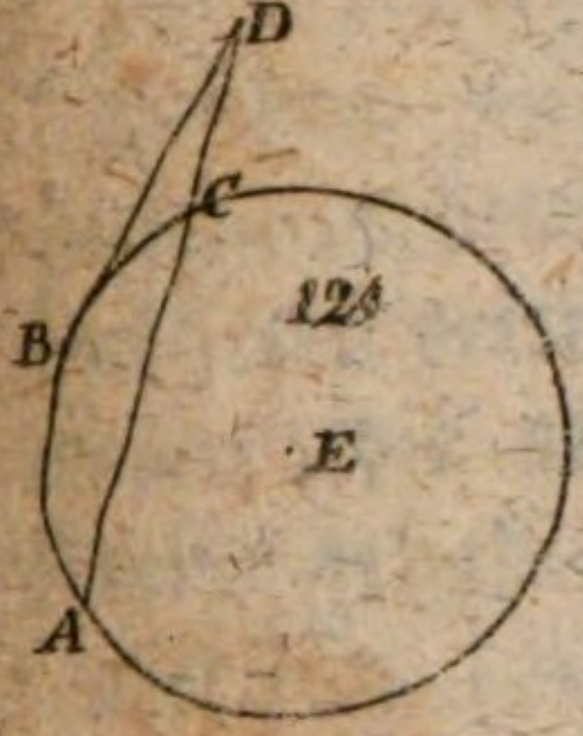

119
D
A
F
G
H
E
C
B

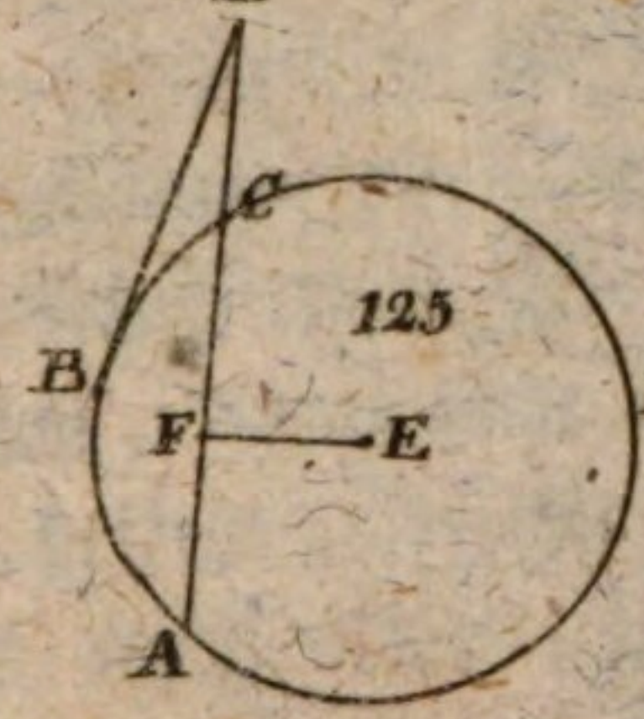

D
C
B
122
D
A

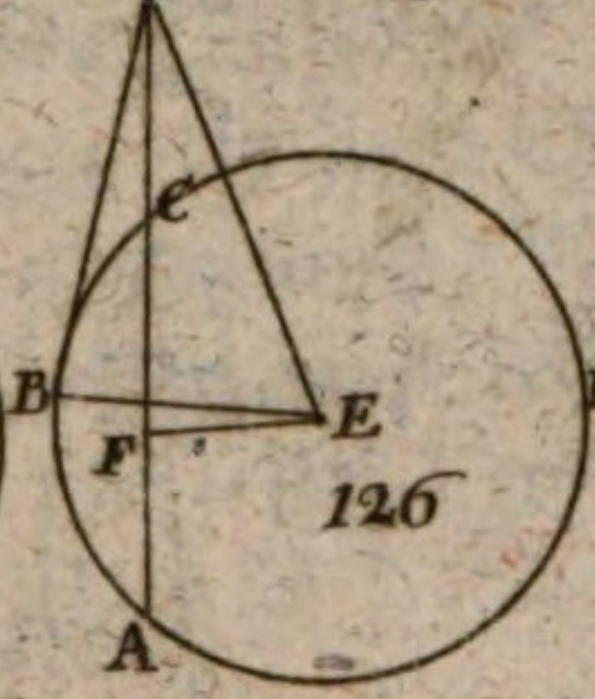

D
C
B
123
E
D
A


C
120
E
A
F
B
D

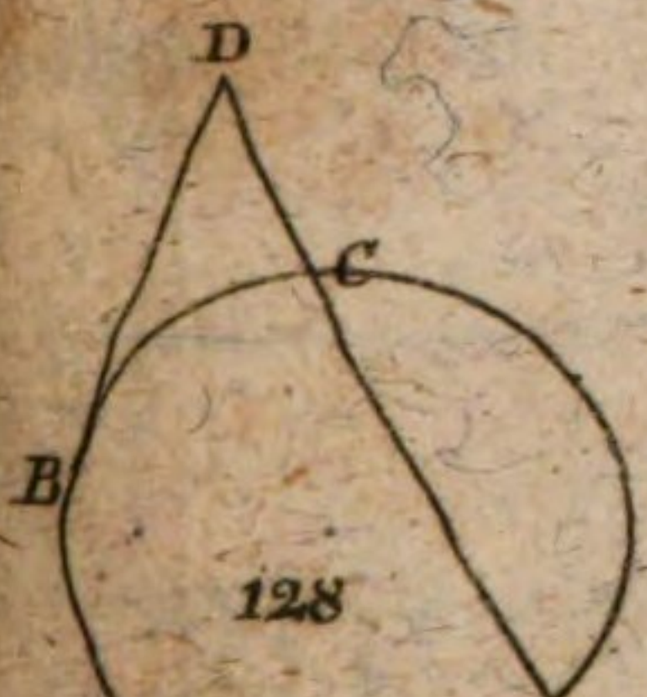

C
121
E
F
A
G
B
D

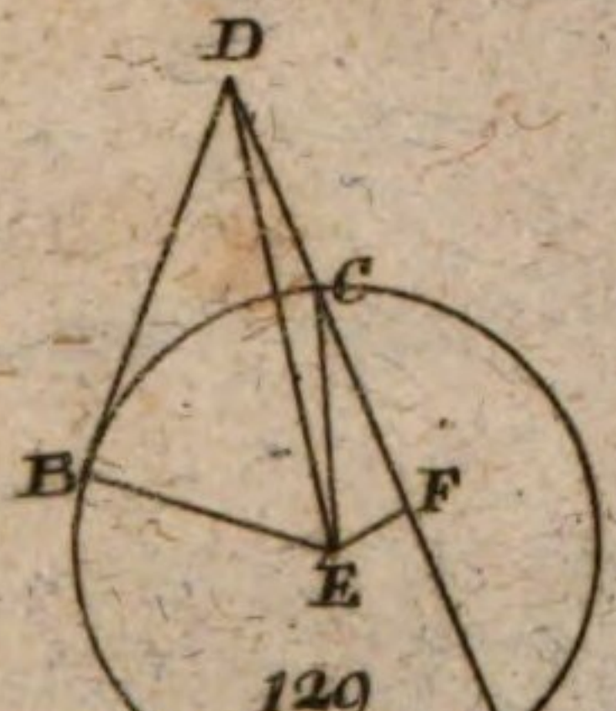

D
C
124
B
E
A

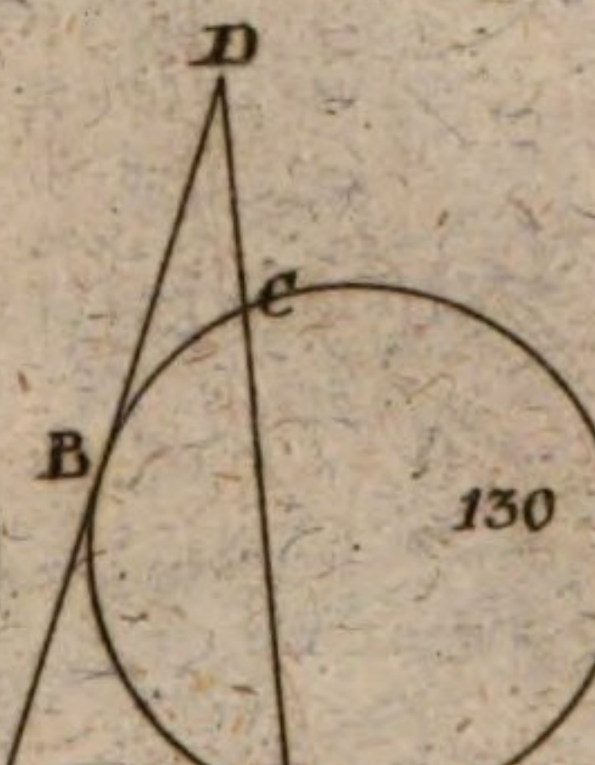

D
C
125
B
F
E
A

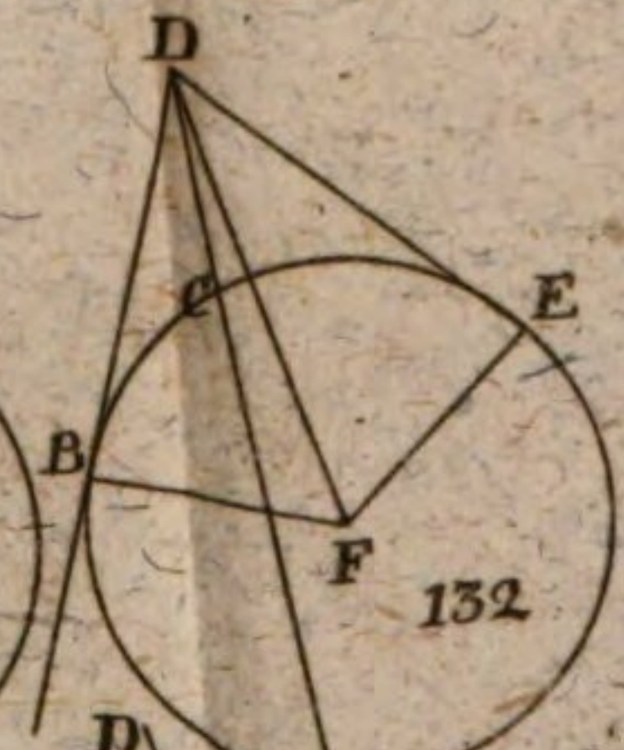

D
C
B
126
E
F
A

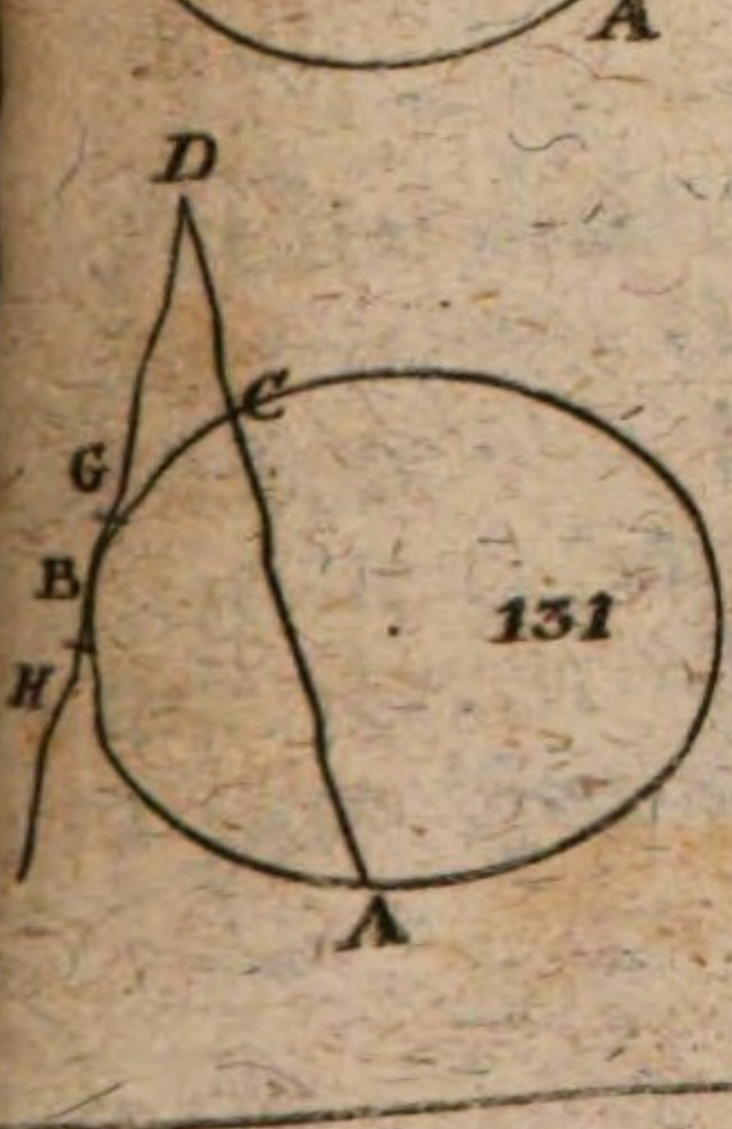
D
C
B
127
E
F
A

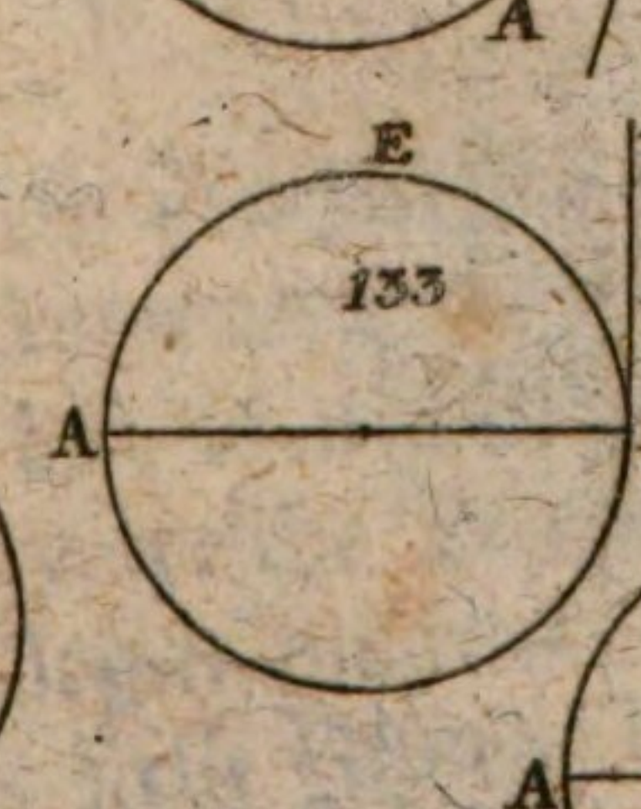

D
C
B
128
A

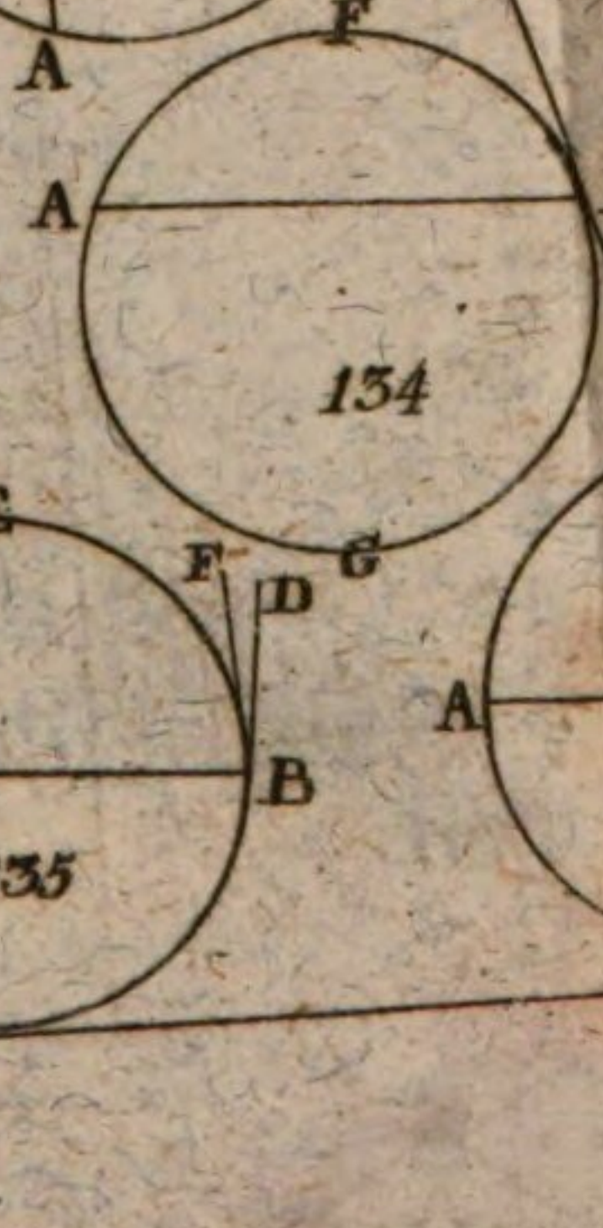

D
C
B
F
E
129
A

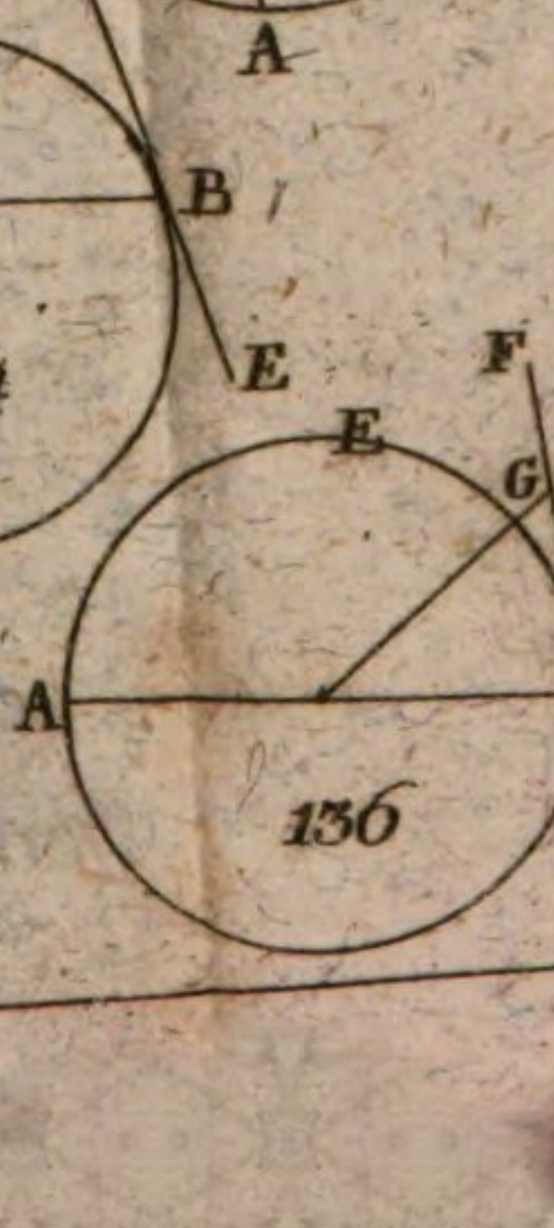

D
C
B
130
A


D
C
E
B
F
132
A


D
C
G
B
H
131
A


E
D
133
A
B


F
D
A
B
134
E
G


E
F
G
A
136

E
F
D
A
B
135

DEq = DC × DA. Da nun auch
BDq = DC × DA ist, so ist
DEq = BDq und also
DE = BD. Ist dies, so ist
△DBF = △DFE, weil
DB = DE
DF = DF und
BF = FE. Folglich ist auch
DBF = DEF, und da
DEF = R, auch
DBF = R und folglich DB eine Tangente. — Nun das nächste Mal von den noch nicht betrachteten aber schon einige Male berührten vermischtlinigen Winkeln, und dann wollen wir alles, was wir bisher von dem Kreise gehabt haben, durch eine allgemeine Uebersicht uns noch etwas bekannter zu machen suchen.

Vierzehntes Gespräch.

L. Um meinem Versprechen am Schlusse unserer letzten Unterredung nachzukommen, muß ich jetzt von den vermischtlinigen Winkeln mit Ihnen reden, welche Tangenten oder Sehnen mit ihrem Bogen machen. Die 133te und 134te Figur stellt Ihnen dergleichen Winkel

dar. Fig. 133 macht der Bogen ER so wohl mit dem Durchmesser AB als mit der Tangente DB einen vermischtlinigen Winkel, und Fig. 134 thun solches die Bogen FB und GB so wohl mit der Sehne AB als mit der Tangente DBE. Die vermischtlinigen Winkel, welche von einem Durchmesser oder Sehne mit einem Bogen auf diese Art gemacht werden, nennt man auch Winkel der Abschnitte, welche von diesem Durchmesser oder Sehne und ihrem Bogen eingeschlossen werden, und wir wollen uns diese Benennung merken, um desto kürzer uns ausdrücken zu können. Es ist aber ein **Winkel eines Abschnittes** von einem **Winkel im Abschnitte** sehr unterschieden; jener ist ein vermischtliniger, dieser ein geradliniger Winkel, und man muß sich daher sehr hüten, diese beyde Arten mit einander zu verwechseln. Nun entsteht die Frage: Wie groß ist ein Winkel eines Abschnitts? Ein Paar Worte vorläufig. Wenn wir bisher bey geradlinigen Winkeln die Frage beantworteten, wie groß dieselben seyn; so verglichen wir immer geradlinige Winkel mit geradlinigen Winkeln. Erinnern Sie Sich z. B. an die Sätze: „Jede zwey Nebenwinkel sind zusammen genommen so groß, als zwey rechte Winkel; Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist der äußere Winkel größer, als jeder der innern ihm gegenüber stehenden Winkel; Wenn zwey Parallellinien von einer

ner dritten geschnitten werden, so sind so wohl jede zwey Wechselwinkel einander, als jeder äußere seinem innern gegenüber stehenden gleich; und d. g. Diese Vergleichung hatte also auch keine Schwierigkeit, indem wir stets ähnliche oder gleichartige Dinge mit einander verglichen, und eben so wenig Schwierigkeit würde sich bey der Betrachtung der vermischtlinigen Winkel finden, wenn man einen gegebenen vermischtlinigen Winkel mit einem andern vermischtlinigen Winkel in Vergleichung stellte. Allein das thut man bisweilen bey der Beantwortung der vorhin aufgeworfenen Frage nicht, sondern man sucht da vermischtlinige Winkel mit geradlinigen zu vergleichen, und stoßt alsdann auf Schwierigkeiten, die Sie kennen lernen, aber dadurch nicht aufgehalten werden sollen. — Nun die Frage: Kann man Fig. 133 aus B, wenn DB die Tangente ist, eine linie ziehen, die zwischen DB und den Bogen EB fiele?

S. Die Frage ist schwer zu beantworten.

L. Wenn es möglich wäre, und z. B. FB Fig. 135 diese linie wäre, könnte dann wohl FB, da DB senkrecht auf AB steht, auch auf AB senkrecht seyn?

S. Nein, denn aus Einem Punkte einer linie kann nicht mehr als eine senkrechte linie auf derselben errichtet werden.

L. Wenn also FB nicht senkrecht auf AB ist, und dieselbe zwischen DB und den Bogen EB fallen soll, so muß eine auf FB aus C ge-

zogene senkrechte Linie dieselbe in einem Punkte außer dem Kreise z. B. in G Fig. 136 treffen? Nicht?

S. Ja.

L. Betrachten Sie nun das Dreyeck CGB, worinn CGB = R seyn soll. Ist dies möglich?

S. Nein, denn wenn CGB = R ist, so ist GBC < R, und dann CG < CB, welches unmöglich statt finden kann, indem ein Theil von CG, da G außer dem Kreise liegt, schon der CB gleich ist.

L. Was folgt also daraus?

S. Daß aus dem Punkte, in welchem eine Tangente den Kreis berührt, keine gerade linie gezogen werden könne, die zwischen die Tangente und den Kreis fiele, und mit dem Kreise nur den Berührungspunkt gemein habe.

L. Nun gedenken Sie Sich einen spitzen Winkel, so groß als Sie immer wollen, und legen Sie seine Spitze in Gedanken auf B und den einen Schenkel desselben auf CB. Kann, wenn dies geschehen, der andere Schenkel wohl auf BD fallen?

S. Nein, denn dann wäre es kein spitzer, sondern ein rechter Winkel.

L. Oder kann dieser andere Schenkel zwischen der Tangente DB und dem Bogen EB zu liegen kommen, so daß er nur den Punkt B mit ihm gemein hätte?

S.

S. Auch das nicht, denn zwischen D B und den Bogen E B kann durch B keine gerade Linie gezogen werden.

L. Also muß doch der Anfang des Bogens E B bey B zwischen die Tangente D B und den gedachten andern Schenkel des angenommenen spitzen Winkels fallen? Denn mit F B kann E B nicht zusammen fallen, weil E B sonst eine gerade und keine krumme Linie wäre.

S. Ja.

L. Und der Winkel, welchen der Bogen E B mit A B macht, ist also größer als der angenommene spitze Winkel, und kleiner als D B C?

S. Ja.

L. Und da Sie den spitzen Winkel so groß annehmen konnten als Sie wollten, so ist der vermischtlinige Winkel, den ein Durchmesser mit seinem Bogen macht?

S. Kleiner als ein rechter, und größer als jeder spitze Winkel.

L. Nun betrachten Sie auch den vermischtlinigen Winkel D B E. Wenn Sie einen auch noch so kleinen spitzen Winkel Sich gedenken, und seine Spitze auf B, und den einen seiner Schenkel auf D B legen; kann der andere Schenkel wohl zwischen D B und E B fallen?

S. Nein, denn dazwischen fällt keine gerade Linie.

L. Kann der gedachte andere Schenkel auf E B fallen?

S. Nein, denn sonst wäre E B eine gerade Linie.

L. Und also liegt EB, seinem Anfange bey B nach, zwischen DB und dem andern Schenkel des angenommenen spitzen Winkels?

S. Ja.

L. Und der Winkel DBE ist also?

S. Kleiner als der angenommene spitze Winkel.

L. Und da Sie denselben so klein annehmen konnten als Sie wollten; so ist der Winkel, den eine Tangente mit ihrem Bogen macht?

S. Kleiner als jeder noch so kleine spitze Winkel.

L. Der Winkel eines Halbkreises ist also kleiner als ein rechter Winkel, sein Rest aber (DBE nenne ich so) kleiner als jeder spitze Winkel, so klein man denselben auch annehmen mag; bis hieher folgt alles, was wir behauptet haben, ohne Schwierigkeit. Ueberdenken Sie nur den gegangenen Weg noch einmal. (Der Lehrer stellt, ehe er weiter geht, eine Wiederholung des vorhergehenden an.) Allein man zieht aus den bisherigen Behauptungen bisweilen Folgen, die unmöglich statt finden können, und dann sind die Schwierigkeiten da, deren ich vorhin gedachte. Einen geradlinigen Winkel nemlich gedacht, der kein stumpfer, aber größer seyn soll, als jeder noch so große spitze Winkel; wie groß muß derselbe seyn?

S. So groß als ein rechter.

L. Richtig; allein von was für Winkeln muß die Rede seyn, wenn man dies behaupten will?

S.

S. Von geradlinigen Winkeln.

L. Kann man das, was man von geradlinigen Winkeln behaupten kann, auch sogleich von den vermischtlinigen behaupten?

S. Nein, denn das ist ja eine ganz andere Art von Winkeln.

L. Ist also, wenn ein geradliniger Winkel, der größer ist, als jeder noch so große spitze, einem rechten Winkel gleich ist, auch ein vermischtliniger Winkel, der jeden geradlinigen spizzen Winkel an Größe übertrifft, einem rechten Winkel gleich?

S. Das folgt nicht, ja wir haben bewiesen, daß er kleiner ist, als ein rechter.

L. Gesetzt ferner, daß ich von einem geradlinigen Winkel spräche, der kleiner seyn sollte, als jeder spitze geradlinige Winkel, so klein man denselben auch annähme; liesse sich dabey wohl ein wirklicher Winkel gedenken?

S. Nein, denn wenn man einen geradlinigen spitzen Winkel immer kleiner sich gedenkt, so fallen die Schenkel desselben immer näher an einander, und die Schenkel eines Winkels, der kleiner seyn soll, als jeder noch so kleine spitzer Winkel, müssen auf einander fallen, und also gar keinen Winkel machen.

L. Also ist ein geradliniger Winkel, der kleiner ist, als jeder noch so kleine spitze Winkel, eigentlich kein Winkel, und die linien, welche einen solchen Winkel machen sollten, fallen auf einander. Nicht?

S. Ja.

L. Ist es mit den vermischtlinigen Winkeln auch so?

S. Nein; denn der Winkel DBE ist kleiner, als jeder noch so kleine spitze geradlinige Winkel, aber seine Schenkel, die Linie DB nemlich und der Bogen EB, können nicht auf einander fallen.

L. In allen bisherigen Behauptungen sind wir noch auf keine Schwierigkeit gestoßen; aber wenn wir nicht das vor Augen behalten, daß geradlinige und vermischtlinige Winkel zwey ganz verschiedene Arten sind, und daß also die Behauptungen, die von der einen Art gelten, nicht auf die andere Art angewendet werden können, so können wir uns leicht verleiten lassen, zu behaupten, theils, daß ein und derselbe Winkel einmal einem rechten Winkel gleich, und dann auch kleiner als ein rechter Winkel sey; theils, daß zwey aus einem Punkte gezogene gerade Linien zu gleicher Zeit auf einander fallen, und auch nur einen Punkt gemein haben können. Denn wie groß ist der Winkel eines Halbkreises?

S. Kleiner als ein rechter, aber größer als jeder noch so großer spitzer Winkel.

L. Wenn man nun eben das von vermischtlinigen Winkeln sagen könnte, was von geradlinigen Winkeln wahr ist; so müßte doch der Winkel eines Halbkreises, da er größer,

als

als jeder noch so großer spitzer Winkel ist, einem rechten Winkel gleich seyn?

S. Ja.

L. Nach der vorhergehenden Behauptung also sollte er kleiner als ein rechter Winkel und nun einem rechten Winkel gleich seyn. Wie wäre das möglich? Sie sehen indeß, worin man, wenn man so schließt, fehlt, und werden, denke ich, nie diese Folge aus dem bewiesenen herleiten. Eben so ist der Winkel DBE kleiner als jeder noch so kleine spitze Winkel. Könnte man nun eben das hier behaupten, was von geradlinigen Winkeln wahr ist, nemlich, daß ein solcher Winkel gar kein Winkel sey, so müßte DB auf EB fallen. Wir wissen aber, daß wir auch zu dieser Folge kein Recht haben, weil wir die geradlinigen und vermischtlinigen Winkel als zwey ganz verschiedene Arten betrachten müssen. — Nach diesen allen wird es nun nicht nöthig seyn, weitläuftig noch von den Winkeln der Abschnitte überhaupt zu sprechen. Um ihrer indeß doch zu gedenken, wie glauben Sie z. B. die Größe des Winkels ABF Fig. 134. bestimmen zu können?

S. Wenn DB eine Tangente des Kreises AFBG für den Punkt B ist, so ist der Winkel ABF kleiner als ABD, aber größer als jeder Winkel, der kleiner ist als ABD, wenn auch der Unterschied noch so wenig beträgt.

L. Und worauf gründen Sie diese Behauptung?

S. Darauf, daß zwischen BD und BF durch B keine gerade Linie gezogen werden kann, denn dies vorausgesetzt, so kann man hier eben so schließen, als vorhin, da wir bewiesen, daß Fig. 133 ABE kleiner als ABD, aber größer als jeder noch so große spitze Winkel sey.

L. Und der Winkel DBF?

S. Dieser ist kleiner als jeder noch so kleine spitze Winkel, ohne daß er deswegen gar kein Winkel wäre.

L. Um allen Schwierigkeiten, die Ihnen in Ansehung der vermischtlinigen Winkel, welche Winkel der Abschnitte heissen, entstehen könnten, vorzubeugen, will ich hier noch anmerken, daß man, so wie man überhaupt unter einem Winkel die Neigung zweyer aus einem Punkte gezogenen Linien gegen einander versteht, unter einem Winkel eines Abschnitts die Neigung verstehe, welche der Bogen des Abschnitts gegen seine Sehne oder Durchmesser hat. Um diese Neigung sich aber richtig zu denken, muß man bloß auf den Punkt sehen, der dem Punkte B zunächst sich gedenken läßt. Daraus ergiebt sich denn natürlicher Weise, daß man hier nicht verlangen dürfe, alles sinnlich gemacht zu sehen, sondern, daß hier bloß der Verstand urtheilen müsse; und fragen wir den, so zeigt er uns auf dem betretenen Wege, daß sich alles so, wie wir es gelernt haben, und nicht anders verhalte. Doch nun weiter zu der allgemeinen Uebersicht alles dessen, was

wir

wir bisher von dem Kreise gelernt haben, damit wir dadurch uns das bisherige nicht nur geläufiger machen, sondern auch das finden, was uns von dem Kreise noch übrig ist.

S. (Fällt ein) Also ist noch etwas von dem Kreise übrig? Ich denke, daß wir schon alles dabey vorkommende untersucht haben.

L. So wie wir die Sätze, welche wir in der Lehre von den Dreyecken gelernt haben, benutzten, um die Parallelogramme kennen zu lernen, so können wir auch die von dem Kreise uns erworbene Kenntniß wieder zur Betrachtung verschiedener von uns noch nicht untersuchten Figuren anwenden, und das meinte ich eigentlich.

S. Was sind denn dies für Figuren?

L. Die Antwort auf diese Frage will ich Ihnen noch eine kleine Weile schuldig bleiben, damit wir die vorhin erwähnte allgemeine Uebersicht nicht aus den Augen verlieren. — Was meinen Sie also? Sollten wir nicht die bisher bey dem Kreise erlernten Sätze in gewisse Classen theilen können?

S. O ja. Wir haben Sätze gehabt, welche ganze Kreise, und andere, welche nur Theile eines Kreises betraffen.

L. Und diese letzten Sätze betreffen z. B.?

S. Entweder linien oder Winkel oder Figuren. Wir haben z. B. verschiedene Sätze von den Sehnen im Kreise, desgleichen von den Bogen eines Kreises, ferner Sätze von Win-

Winkeln am Mitttelpunkte und Umfange, ferner Sätze von Ausschnitten und Abschnitten, und endlich Sätze von Rechtecken verschiedener beym Kreise vorkommenden geraden Linien gehabt.

L. Wegen der großen Menge der beym Kreise vorkommenden Sätze, ist es sehr wichtig, daß man sich dieselben in Classen theilt, allein man muß dabey nicht bloß zufrieden seyn, daß man verschiedene Classen gemacht habe, sondern dieselben auch so ordnen, daß man sie leicht übersehen kann. Wie wollen Sie dies nun wohl thun?

S. Den Anfang macht die Aufgabe: den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden; und da mit derselben die Sätze verbunden sind: Wenn in einem Kreise eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt gehet, eine andere, die nicht durch den Mittpunkt gehet, in zwey gleiche Theile theilt, so steht sie auf derselben senkrecht; und, wenn sie auf derselben senkrecht steht, so theilt sie dieselbe in zwey gleiche Theile: da diese Sätze, sage ich, mit der gedachten Aufgabe in Verbindung stehen, indem eine weitere Betrachtung der dazu nöthigen Figur hierauf führt, so können diese Sätze auch sogleich nach jener Aufgabe folgen.

L. Was glauben Sie nun weiter für Sätze folgen lassen zu müssen?

S. Nunmehr sind diejenigen Sätze zu nehmen, welche andere gerade Linien betreffen, die

die sich in und bey dem Kreise gedenken lassen.
Diese gerade Linien sind

1. zwey in einem Kreise sich schneidende Sehnen

2. diejenige gerade Linien, welche sich von einem Punkte in einem Kreise, der nicht der Mittelpunkt ist, nach dem Umfange ziehen lassen

3. diejenige gerade Linien, welche von einem Punkte außerhalb eines Kreises nach dem Umfange gezogen werden können

4. die Sehnen in Rücksicht auf die Frage: Wenn sind zwey Sehnen in einem Kreise gleich oder ungleich?

5. die Sinus und Cosinus

6. die Tangenten und Cotangenten

7. die Secanten und Cosecanten.

L. Welches sind aber die Sätze, welche von diesen Linien durchgenommen worden sind?

S. Folgende.

1. Wenn zwey Sehnen eines Kreises sich schneiden, so theilen sie einander nicht in zwey gleiche Theile.

2. Wenn man aus einen Punkte innerhalb eines Kreises, der nicht der Mittelpunkt ist, gerade Linien nach dem Umfange zieht; so ist

a. diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, unter allen die größte;

b. diejenige, welche mit der durch den Mittelpunkt gezogenen in einer geraden Linie liegt, unter allen die kleinste;

c. eine

c. eine jede dieser Linien grösser oder kleiner, als eine andere, je nachdem sie dem Mittelpunkte näher oder weiter von demselben entfernt ist; und

d. lassen sich aus dem gedachten Punkte nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien nach dem Umfange ziehen, und von diesen beyden gleichen Linien liegt die eine auf der einen und die andere auf der andern Seite der Linie, welche durch den Mittelpunkt geht.

3. Wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises nach dem Umfange gerade Linien zieht; so ist

a. unter denen, welche nach dem Umfange innerhalb gezogen werden

1. diejenige, die durch den Mittelpunkt geht, unter allen die größte

2. eine jede dieser Linien, größer als jede andere, die weiter als sie von dem Mittelpunkte entfernt ist.

3. lassen sich von dem angenommenen Punkte innerhalb nach dem Umfange nicht mehr als zwey gleiche gerade Linien ziehen, und diese fallen auf zwey verschiedene Seiten der Linie, welche durch dem Mittelpunkt geht.

b. unter denen aber, welche außen auf dem Umfange gezogen worden ist

1. diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht, unter allen die kleinste;

2. diejenige von zweyen die größere, die von dem Mittelpunkte weiter entfernt ist;

3. lassen

3. lassen sich auch hier nur zwey gleiche gerade linien ziehen, die ebenfalls auf verschiedene Seiten derjenigen linie, die verlängert durch den Mittelpunkt geht, fallen.

4. Bey den Sehnen haben wir in Rücksicht auf die Frage: Wenn sind zwey Sehnen einander gleich oder ungleich? folgende Sätze gehabt:

a. Sehnen, die vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, sind gleich groß, und umgekehrt, sind auch gleiche Sehnen vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

b. Sehnen, die vom Mittelpunkte ungleich weit entfernt sind, sind selbst ungleich, und zwar ist diejenige größer, die dem Mittelpunkte näher ist.

c. Von Sehnen, die ungleich sind, ist die größere dem Mittelpunkte näher als die kleinere.

5. Was die Sinus und Cosinus der Winkel betrifft, so haben wir außer dem Begriffe davon auch das Wachsen und Abnehmen derselben betrachtet, und bemerket,

a. daß die Sinus der spitzen Winkel mit den Winkeln wachsen und abnehmen, und daß der Sinus eines rechten Winkels so groß als der Radius ist

b. daß die Cosinus abnehmen, wenn die Winkel zunehmen, und zunehmen, wenn die Winkel abnehmen.

c. Daß man den Sinus eines Winkels und den Cosinus des Complements desselben, desgleichen den Cosinus eines Winkels und den Sinus seines Complements verwechseln können.

6. Bey den Tangenten und Cotangenten haben wir ebenfalls nach dem Begriffe davon und der Aufgabe: Für einen gegebenen Punkt im Umfange eines Kreises, die Tangente zu ziehen; das Wachsen und Abnehmen derselben betrachtet.

a. Die Tangenten spitzer Winkel wachsen und nehmen mit den Winkeln ab,

b. Die Cotangenten nehmen ab, wenn die Winkel zunehmen, und nehmen zu, wenn die Winkel abnehmen.

c. Die Tangente eines rechten Winkels ist unendlich groß.

d. Statt der Tangente eines Winkels kann man die Cotangente des Complements, und statt der Cotangente die Tangente des Complements setzen.

e. Ist auch die Aufgabe aufgelöset worden: Aus einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente dieses Kreises zu ziehen.

7. Was endlich die Secanten und Cosecanten betrifft, so sind dabey nach dem Begriffe davon die Sätze bewiesen worden,

a. daß die Secanten mit den Winkeln ab und zunehmen;

b. Daß die Cosecanten abnehmen, wenn die Winkel wachsen, und wachsen, wenn die Winkel abnehmen;

c. daß die Secante eines Winkels unendlich groß sey;

d. daß man statt der Secante die Cosecante des Complements, und statt der Cosecante die Secante des Complements setzen könne.

L. Sie haben die Ordnung, in welcher wir diese Sätze durchgenommen haben, sich gut gemerkt, und wenn man zum ersten Male den Kreis untersucht, so ist diese Ordnung auch die bequemste, weil man dabey nur einen Gesichtspunkt hat, nemlich die Art der Gegenstände, welche untersucht werden. Wenn man aber hinterher nach mehrern Gesichtspunkten ordnen, und z. B. die leichten Sätze so viel als möglich zuerst nehmen will, so kann gleichwohl manche Veränderung darin vorgenommen werden. Nach dem Satze z. B. Wenn zwey Sehnen in einem Kreise sich schneiden, so theilen sie einander nicht in zwey gleiche Theile; kann man sehr bequem folgende beyde Sätze untersuchen.

1. Zwey Kreise, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt; und

2. zwey Kreise, die einander inwendig berühren, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt. Denn einmal sind diese Sätze an diesem Orte schon vollkommen verständlich, und zweytens kann man sie auch in so fern hieher rechnen, weil dadurch die Lage der Mittelpunkte bestimmt wird. Eben so kann man nach den Sätzen, welche die geraden Linien betreffen, die von einem Punkte innerhalb eines Kreises nach dem Umfange gezogen werden können, sogleich den Satz nehmen: Wenn von einem Punkte innerhalb eines Kreises mehr als zwey gleiche gerade Linien nach dem Umfange gezogen werden können; so ist dieser Punkt der Mittelpunkt dieses Kreises. Die Verbindung fällt leicht in die Augen, indem von jedem andern Punkte nur zwey gleiche gerade Linien nach dem Umfange gezogen werden können. Mit diesem Satze aber hängt nun wieder der, daß zwey Kreise sich in nicht mehr als in zwey Punkten schneiden können zusammen, und er kann also nun auch sogleich folgen. Sie sehen, wie auf diese Art die bisher betrachteten Sätze in einer ganz andern Ordnung zu stehen kommen können, und ich will Ihnen Zeit zu einem Versuche, dieselben in eine andere gute Ordnung zu bringen, lassen. Machen Sie darüber einen Aufsatz, und lesen sie dabey das dritte Buch der euclideischen Anfangsgründe. In unserer nächsten

Unter-

Unterredung soll das, was Sie bey diesem Geschäfte so wohl als bey der Lesung des zweyten Buchs der gedachten Anfangsgründe gedacht haben, den Stoff zu fernern Unterredungen an die Hand geben.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5 Zeile 4 von oben lese man geradliniger statt geradlinigen
— — 4 von unten — Diagonale — Diagonala
S. 11 — 4 von oben — — BC — BE
— 13 — 22 — — — G — B in BD u. EB
— 57 — 20 — — EF bis L verlängerten? statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
— — 25 — — AK — AL —
— 62 — 8 — — AGq — AG —
— 66 — 8 von unten — den — der —
— 67 — 3 von oben — FEq — FAq —
— — — 4 — — FEq — FAq —
— — — — — — FE — FA —
— 106 — 7 — — AF — EF —
— 156 — 13 setze man nach AK hinzu Fig. 77.
— 159 — 6 — — erhält statt erhälte.
— 166 — 3 — Winkel — Mittelpunkt E
— 172 — 5 von unten von zwey Winkeln — ein Winkel
— 180 — 8 — — ABKC — ABGC
— — — — — — DELF — DEHF
— 201 — 9 — — 120te — 119te
— 203 — 7 — — DA — D.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5 Zeile 4 von oben lese man geradliniger statt geradlinigen
— — — 4 von unten — Diagonale — Diagonala
S. 11 — 4 von oben — — BC — BE
— 13 — 22 — — — G — B in BD u. EB
— 57 — 20 — — EF bis L verlängerten? statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
— — — 25 — — AK — AL —
— 62 — 8 — — AGq — AG —
— 66 — 8 von unten — den — der —
— 67 — 3 von oben — FEq — FAq —
— — — 4 — — FEq — FAq —
— — — — — — FE — FA —
— 106 — 7 — — AF — EF —
— 156 — 13 setze man nach AK hinzu Fig. 77.
— 159 — 6 — — erhält statt erhälte.
— 166 — 3 — Winkel — Mittelpunkt E
— 172 — 5 von unten von zwey Winkeln — ein Winkel
— 180 — 8 — — ABKC — ABGC
— — — — — — DELF — DEHF
— 201 — 9 — — 120te — 119te
— 203 — 7 — — DA — D.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5 Zeile 4 von oben lese man geradliniger statt geradlinigen
— — 4 von unten — Diagonale — Diagonala
S. 11 — 4 von oben — — BC — BE
— 13 — 22 — — — G — B in BD u. EB
— 57 — 20 — — EF bis L verlängerten?
statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
— — 25 — — AK — AL —
— 62 — 8 — — AGq — AG —
— 66 — 8 von unten — den — der —
— 67 — 3 von oben — FEq — FAq —
— — — 4 — — FEq — FAq —
— — — — — — FE — FA —
— 106 — 7 — — AF — EF —
— 156 — 13 setze man nach AK hinzu Fig. 77.
— 159 — 6 — — erhält statt erhälte.
— 166 — 3 — Winkel — Mittelpunkt E
— 172 — 5 von unten von zwey Winkeln — ein Winkel
— 180 — 8 — — ABKC — ABGC
— — — — — — DELF — DEHF
— 201 — 9 — — 120te — 119te
— 203 — 7 — — DA — D.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5 Zeile 4 von oben lese man geradliniger statt geradlinigen
— — 4 von unten — Diagonale — Diagonala
S. 11 — 4 von oben — — BC — BE
— 13 — 22 — — — G — B in BD u. EB
— 57 — 20 — — EF bis L verlängerten?
statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
— — 25 — — AK — AL —
— 62 — 8 — — AGq — AG —
— 66 — 8 von unten — den — der —
— 67 — 3 von oben — FEq — FAq —
— — — 4 — — FEq — FAq —
— — — — — — FE — FA —
— 106 — 7 — — AF — EF —
— 156 — 13 setze man nach AK hinzu Fig. 77.
— 159 — 6 — — erhält statt erhälte.
— 166 — 3 — Winkel — Mittelpunkt E
— 172 — 5 von unten von zwey Winkeln — ein Winkel
— 180 — 8 — — ABKC — ABGC
— — — — — — DELF — DEHF
— 201 — 9 — — 120te — 119te
— 203 — 7 — — DA — D.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5 Zeile 4 von oben lese man geradliniger statt geradlinigen
— — 4 von unten — Diagonale — Diagonala
S. 11 — 4 von oben — — BC — BE
— 13 — 22 — — — G — B in BD u. EB
— 57 — 20 — — EF bis L verlängerten?
statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
— — 25 — — AK — AL —
— 62 — 8 — — AGq — AG —
— 66 — 8 von unten — den — der —
— 67 — 3 von oben — FEq — FAq —
— — — 4 — — FEq — FAq —
— — — — — — FE — FA —
— 106 — 7 — — AF — EF —
— 156 — 13 setze man nach AK hinzu Fig. 77.
— 159 — 6 — — erhält statt erhälte.
— 166 — 3 — Winkel — Mittelpunkt E
— 172 — 5 von unten von zwey Winkeln — ein Winkel
— 180 — 8 — — ABKC — ABGC
— — — — — — DELF — DEHF
— 201 — 9 — — 120te — 119te
— 203 — 7 — — DA — D.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5	Zeile	4	von oben	lese man	geradliniger	statt geradlinigen
—	—	4	von unten	—	Diagonale	— Diagonala
S. 11	—	4	von oben	—	— BC	— BE
—	13	—	22	—	—	— G — B in BD u. EB
—	57	—	20	—	—	EF bis L verlängerten? statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
—	—	—	25	—	—	AK — AL —
—	62	—	8	—	—	AGq — AG —
—	66	—	8	von unten	—	den — der —
—	67	—	3	von oben	—	FEq — FAq —
—	—	—	4	—	—	FEq — FAq —
—	—	—	—	—	—	FE — FA —
—	106	—	7	—	—	AF — EF —
—	156	—	13	setze man nach	AK	hinzu Fig. 77.
—	159	—	6	—	—	erhält statt erhälte.
—	166	—	3	—	Winkel	— Mittelpunkt E
—	172	—	5	von unten	von zwey Winkeln	— ein Winkel
—	180	—	8	—	—	ABKC — ABGC
—	—	—	—	—	—	DELF — DEHF,
—	201	—	9	—	—	120te — 119te
—	203	—	7	—	—	DA — D.

Verzeichniß
einiger Druckfehler.

S. 5 Zeile 4 von oben lese man geradliniger statt geradlinigen
— — 4 von unten — Diagonale — Diagonala
S. 11 — 4 von oben — — BC — BE
— 13 — 22 — — — G — B in BD u. EB
— 57 — 20 — — EF bis L verlängerten?
statt DK und GH verlängerten bis sie sich schnitten
— — 25 — — AK — AL —
— 62 — 8 — — AGq — AG —
— 66 — 8 von unten — den — der —
— 67 — 3 von oben — FEq — FAq —
— — — 4 — — FEq — FAq —
— — — — — — FE — FA —
— 106 — 7 — — AF — EF —
— 156 — 13 setze man nach AK hinzu Fig. 77.
— 159 — 6 — — erhält statt erhälte.
— 166 — 3 — Winkel — Mittelpunkt E
— 172 — 5 von unten von zwey Winkeln — ein Winkel
— 180 — 8 — — ABKC — ABGC
— — — — — — DELF — DEHF
— 201 — 9 — — 120te — 119te
— 203 — 7 — — DA — D.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann Andreas Christian,

Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie

Bd.: [3],1

Berlin 1783

Math.p. 355 t-1/3,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137681-2
VD18 9006206